

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КЛА В РИМАНОВЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ. Ч. 1: ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ, ДЕВИАЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Ульянов Сергей Викторович¹, Шоланов Крганбай Сагнаевич²

¹Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
PronetLabs;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: uyanovsv@mail.ru.

²Доктор технических наук, профессор;
Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева,
кафедра Робототехника и технические средства автоматизации;
Казахстан, г. Алматы, ул. Сатпаев, 22А;
e-mail: sholkor@rambler.ru.

Приведены необходимые сведения из дифференциальной геометрии. Данные математические результаты используются при выводе уравнений релятивистской навигации космических летательных аппаратов (КЛА) и искусственных спутников Земли (ИСЗ) в римановых метрических пространственно-временных континуумах. Обсуждаемые результаты позволяют в процессе обучения эффективнее освоить идеи самой дифференциальной геометрии при применении в практических задачах интеллектуального управления КЛА и квантовых алгоритмов.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, параллельный перенос векторов и тензоров, девиация геодезических.

RELATIVISTIC INERTIAL CELESTIAL NAVIGATION AND INTELLIGENT CONTROL OF THE SOLAR COSMIC SATELLITE SYSTEMS IN RIEMANNIAN METRIC SPACES UNDER STOCHASTIC EXCITATIONS PT. 1: PARALLEL DISPLACEMENT OF VECTORS AND TENSORS, AND GEODESIC DEVIATIONS LINES

Ulyanov Sergey¹, Sholanov Korganbai²

¹Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
PronetLabs;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: uyanovsv@mail.ru.

²Doctor of Science in Engineering, professor;
Kazakhstan National technical university of K.I. Satpaeva,
Robotics and automatic technical devices;
Kazakhstan, Almaty, Satpaev str., 22A;
e-mail: sholkor@rambler.ru.

Necessary results from differential geometry are introduced. These mathematical results are used in relativistic celestial mechanics and relativistic inertial navigation of satellites equations in Riemannian metric space-time continuum. Discussed results are used in education processes of differential geometry study with applications in practices of intelligent control of relativistic inertial navigation and quantum algorithms.

Keywords: differential geometry, parallel transport of vectors and tensors, geodesic deviations.

Введение

Развитие космической техники привело к необходимости разработки новых информационных технологий проектирования аппаратной поддержки искусственных спутников земли (ИСЗ) и космических летательных аппаратов (КЛА) для освоения планет Солнечной системы и формирования интеллектуальных алгоритмов управления навигацией. В свою очередь, этот процесс стимулировал интерес практического применения релятивистских эффектов специальной и общей теории относительности (СТО и ОТО), которые учитываются в интеллектуальных алгоритмах управления КЛА, основанных на механике и теории гравитации Ньютона. Непротиворечивый переход от ньютоновой механики к релятивистской механике, связан с решением вопроса о корректности описания моделей объектов управления (ОУ). Разработка логически непротиворечивых и адекватных (корректных) математических моделей¹ физических ОУ с целью объективного извлечения знаний для эффективной реализации интеллектуальных систем управления (ИСУ) новыми видами современной техники является одной из актуальных проблем для современного этапа развития теории и систем управления.

Диапазон применения современных ИСУ включает в себя, например, от сложных макрообъектов управления типа КЛА до квантовомеханических моделей нанотехнологий (на микро- и наноуровнях) с необходимостью учета релятивистских и квантовых эффектов общей теории относительности и квантовой механики, соответственно [1-6].

Выбор корректной модели, в первую очередь объектов управления (ОУ) минимальной алгоритмической сложности, является важной для практики задачей. Однако критерий минимальной алгоритмической сложности при выборе метода описания модели ОУ требует математического уточнения и физического обоснования.

Примером могут служить следующие реальные факты. Так при оценке возможных отклонений траекторий движения КЛА (как ОУ в задаче инерциальной навигации), вычисленных по классической теории, от траекторий движения планет Солнечной системы, экспериментально установленных радиолокационными методами, было выявлено следующее обстоятельство. Для гелиоцентрических расстояний планеты Марс отклонение экспериментальных данных составляет 150 км по отношению к расчетным данным, основанным на классических теориях движения планет, и для планеты Венера до 500 км², соответственно, а для моделей общей теории относительности с ошибкой измерения до 10 м (на протяжении времени наблюдений в 20 лет). Таким образом, несмотря на широко распространенное интуитивное представление о пространственно-временном континууме в классической механике инерциальной навигации КЛА, модель движения планет с учетом релятивистских эффектов является корректной для навигации КЛА даже в пределах Солнечной системы, [2, 3, 7-17].

В данной статье (в дальнейшем по тексту – Часть 1) изложены необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В частности, уделено внимание вопросам определения параллельного переноса векторов и тензоров, а также девиации геодезических линий в римановых пространствах, составляющих основу разработки алгоритмов релятивистской навигации КЛА.

В частях 2 – 4 изложены вопросы оценки релятивистских эффектов, описания систем отсчета, влияния случайных воздействий на траектории пробных тел в римановых пространствах, а также релятивистской навигации КЛА и ИСЗ в условиях случайных возмущений.

Приведем базовые определения и понятия дифференциальной геометрии³, которые в инженерных курсах дифференциальной геометрии в доступной форме освещены слабо. Излагаемый раздел дифференциальной геометрии представляет собой определенную трудность при изучении студентами инженерных специальностей и необходим также для понимания элементов информационной и стохастической геометрии при применении в компьютерных технологиях релятивистской инерци-

¹ Delphenich D.H. On the general structure of mathematical models for physical systems // arXiv:1111.1602 [gr-gc]. – 2011.

² См., Кислик М.Д., Колюка Ю.Ф., Котельников В.А. и др. Определение орбит Земли и Венеры, астрономической единицы и радиуса Венеры на основе радиолокационных наблюдений Венеры в 1962 – 1977 г. // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 5; *ibid* // ДАН СССР. – 1980. – Т. 255. – № 6.

³ Подробности см. Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами. – М. Наука, 1982. – Приложение 1: Тензорное исчисление в криволинейных координатах и элементы дифференциальной геометрии. – С. 375-403.

альной навигации и теории квантовых алгоритмов. Некоторые положения дифференциальной геометрии⁴

Элемент длины в трехмерном евклидовом пространстве в декартовых координатах определяется в виде:

$$ds^2 = dx^{12} + dx^{22} + dx^{32} , \quad (1)$$

а в сферических координатах – формулой

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (2)$$

Координаты в данном разделе будем обозначать, как это принято в тензорном анализе, буквами x с проставленными сверху индексами (контравариантный вектор, см. ниже пояснения).

Если положить $r = x^1; \theta = x^2; \varphi = x^3$, то (2) можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2 , \quad g_{11} = 1; g_{22} = (dx^1)^2; g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 (x^2) . \quad (3)$$

Если преобразовать систему координат в (3) в другую систему (x'^1, x'^2, x'^3) в виде $x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$, где f^i – некоторые функции, то элемент длины в координатах (x'^1, x'^2, x'^3) может быть записан как

$$ds^2 = \sum_i \sum_k g'_{jk} dx'^i dx'^k , \quad (4)$$

где g'_{jk} – некоторые функции от координат (x'^1, x'^2, x'^3) .

Введем теперь важное правило записи суммы: если один и тот же индекс входит дважды в какой-нибудь член, причем один раз как верхний индекс, а другой раз как нижний, то этому индексу следует придать все значения от 1 до 3 (в n – мерном пространстве от 1 до n) и полученные члены сложить.

В соответствии с этим правилом формула (4) может быть записана без знаков суммы, т.е.

$$ds^2 = g'_{jk} dx'^i dx'^k . \quad (5)$$

Формула (5) относится к трехмерному пространству, так как характер функции g_{ik} в этой формуле таков, что с помощью надлежащего преобразования координат она может приведена к виду

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 .$$

Риман обобщил понятие трехмерного евклидова пространства: было введено понятие n – мерного риманового пространства, линейный элемент которого определяется формулой

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k , \quad i, k = 1, 2, \dots, n , \quad (6)$$

причем характер функции $g_{ik}(x^1, \dots, x^n)$, вообще говоря, таков, что не существует преобразования координат, переводящего форму (6) в сумму квадратов дифференциалов координат. В тех частных случаях, когда такое преобразование возможно, риманово пространство вырождается в n -мерное евклидово пространство.

Пример 1. Простейшим примером двухмерного риманового пространства является поверхность шара. Линейный элемент этой поверхности может быть записан в виде:

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7)$$

или в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k , \quad i, k = 1, 2,$$

⁴ Необходимые сведения из дифференциальной геометрии в рамках курса технического университета читатель может найти в учебнике: Методы современной теории автоматического управления – Сер. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – Т. 5. – Глава 1.

где $x^1 = \theta; x^2 = \varphi; g_{11} = R^2; g_{22} = R^2 \sin^2 x^1; g_{12} = 0$.

Не существует преобразования координат, переводящего форму (7) или (8) в сумму квадратов дифференциалов координат. Отметим, что при $R = 1/2$ имеем модель сферы Блоха, широко применяемую в квантовой теории информации для описания поведения квантового бита.

Переход от системы координат x^1, \dots, x^k к другой системе координат производится при помощи формул

$$x'^i = \varphi(x^1, \dots, x^k). \quad (8)$$

При этом предполагается, что якобиан

$$\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} \right| \neq 0. \quad (9)$$

Как координаты x^1, \dots, x^k , так и получающиеся при помощи уравнений (8) координаты x'^1, \dots, x'^k относятся к одной и той же точке пространства. Другими словами, они определяют одну и ту же точку в разных системах координат. В силу уравнения (9) должны существовать обратные преобразования

$$x^i = \psi^i(x'^1, \dots, x'^k), \quad (10)$$

переводящие координаты x'^1, \dots, x'^k в координаты x^1, \dots, x^k .

При преобразовании координат (8) их дифференциалы преобразуются по закону

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k. \quad (11)$$

Всякую совокупность n величин, которые преобразуются по закону

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k, \quad (12)$$

т.е., по тому же закону, что и дифференциалы координат, называют *контрвариантным* вектором.

Рассмотрим теперь, как преобразуются производные скалярной функции $\varphi(x^1, \dots, x^k)$ при переходе к новой системе координат. Очевидно, имеем $\frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x'^i}$.

Всякую совокупность величин, которые преобразуются по закону

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k, \quad (13)$$

т.е. по тому же закону, что и производные скалярной функции $\varphi(x^1, \dots, x^k)$ называют *ковариантным* вектором. Компоненты ковариантных векторов принято обозначать при помощи нижних индексов.

Аналогичным образом определяется ковариантный (контравариантный, смешанный) тензор и алгебра преобразований его компонент (см. ниже).

Примечание 1: Контрвариантные и смешанные тензоры заданной валентности. Если составить всевозможные произведения $A^{\mu\nu}$ компонент двух векторов A^μ и A^ν , заданных в n -мерном пространстве, $A^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu$, $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$, то в соответствии с (12) величины $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} A^{\mu\nu}. \quad (14)$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n -мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (14), называется *контравариантным тензором второй валентности*.

Следует заметить (и это очень существенно), что не всякий вектор второй валентности можно составить по формуле $A^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu$, т.е. при помощи составляющих двух векторов. Однако можно показать, что любой тензор второй валентности $A^{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы $A^{\mu\nu} = A_1^\mu B_1^\nu + A_2^\mu B_2^\nu + \dots + A_n^\mu B_n^\nu$ от n пар надлежаще выбранных n -мерных векторов.

Если составить n^2 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух ковариантных векторов $A_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu$, то в соответствии с (13) для этих величин справедлив закон преобразования:

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} A_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n -мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (15), называется *ковариантным тензором второй валентности*.

Наконец, можно составить n^2 произведений из A_μ ковариантных и B^ν контравариантных компонент двух векторов:

$$A_\mu{}^\nu = A_\mu B^\nu. \quad (16)$$

В соответствии с уравнениями (12) и (13) величины $A_\mu{}^\nu$ удовлетворяют закону преобразованию

$$A'_{\sigma}{}^{\tau} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} A_\alpha{}^\beta. \quad (17)$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n -мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (17), называется *смешанным тензором второй валентности*.

По аналогии с изложенными выше определениями, можно дать определения контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров любой валентности.

Отметим, что если в некоторой системе координат (x^1, \dots, x^k) элемент длины задается формой $ds^2 = g_{ik}(x^1, \dots, x^k) dx^i dx^k$, а в другой системе координат формой $ds'^2 = g'_{ik}(x'^1, \dots, x'^n) dx'^i dx'^k$, то должно выполняться равенство $ds' = ds$. Из данного условия вытекает преобразование

$$g'_{pk} = \frac{\partial x^s}{\partial x'^p} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} g_{st}. \quad (18)$$

Таким образом, $g_{ik}(x^1, \dots, x^k)$ является компонентами ковариантного тензора.

Пример 2: Определение угла между векторами в криволинейных координатах. Теперь рассмотрим, как определяется угол между векторами в криволинейных координатах. Можно считать, что основная фундаментальная форма пространства $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ определяет длину ds вектора, имеющего компоненты dx^s . Аналогично этому дается определение длины вектора, имеющего компоненты λ^i . При этом можно доказать, что $(g_{ik} \lambda^i \mu^k) \leq 1$. Тогда косинус угла между двумя единичными векторами λ^i, μ^k определяется при помощи формулы

$$\cos \theta = g_{ik} \lambda^i \mu^k. \quad (19)$$

Выражение, стоящее в правой части (19), является инвариантом, т.е. величиной, не изменяющейся при преобразованиях координат. В декартовых координатах (если переход к ним возможен, т.е.,

если пространство евклидово) формула (19) принимает вид $\cos \theta = \delta_{ik} \lambda_i \lambda_k$. Выражение (19) в двух- и трехмерном евклидовых пространствах действительно дает величину косинуса угла (в соответствии с его обычным геометрическим смыслом) между двумя единичными векторами. Если заданы два произвольных вектора u^i и v^i , то косинус угла между ними определяется по формуле:

$$\cos \theta = \frac{g_{ik} u^i v^k}{\sqrt{g_{ik} u^i u^k g_{nm} v^n v^m}}. \quad (20)$$

Из формулы (20) следует, что если два вектора ортогональны друг другу, то

$$g_{ik} u^i v^k = 0. \quad (21)$$

Пример 3: Уравнения геодезической линии. Длина кривой линии $x^i = x^i(t)$, соединяющей две точки $p_1(x^1(t_1), \dots, x^n(t_1))$ и $p_2(x^1(t_2), \dots, x^n(t_2))$, может быть вычислена с помощью интеграла

$$\int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial t}} dt. \quad (22)$$

Кривая, для которой интеграл (22) при постоянных значениях t_1 и t_2 принимает экстремальное значение, называется *геодезической* линией рассматриваемого пространства. Если в качестве параметра вдоль геодезической линии взять длину дуги s , то, как нетрудно показать методами вариационного исчисления, дифференциальные уравнения геодезической линии будут иметь вид:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pk} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (23)$$

где $\Gamma^i_{pk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s} \right)$ называются символами Кристоффеля второго рода.

Пример 4: Ковариантное и контрвариантное дифференцирование (абсолютное дифференциальное исчисление). Допустим, что $f(x^1, \dots, x^n)$ является скалярной (инвариантной) функцией. В таком случае

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \quad (24)$$

также является скаляром. Что же касается производных $\frac{\partial f}{\partial x^k}$, то они являются компонентами ковариантного вектора. В дальнейшем df и $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ называются, соответственно, ковариантным дифференциалом и контрвариантной производной скаляра. Примем следующие обозначения для ковариантного дифференциала и ковариантной производной скаляра: $Df = df$; $f_{;k} = \frac{\partial f}{\partial x^k}$.

Итак, между ковариантным дифференциалом и ковариантной производной скаляра f и обыкновенными дифференциалом и производной этого же скаляра нет никакого различия.

Допустим теперь, что $A^i(x^1, \dots, x^n)$ являются компонентами контрвариантного вектора. Вместе с тем, комбинируя закон преобразования для dA^i с законом преобразования для Γ^i_{pk} , можно показать, что

$$DA^i = dA^i + A^p \Gamma^i_{pk} dx^k \quad (25)$$

являются компонентами контрвариантного вектора и

$$A_{,k}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^p \Gamma_{pk}^i \quad (26)$$

являются компонентами смешанного тензора.

Вектор DA^i называется ковариантным дифференциалом вектора A^i и $A_{,k}^i$ – ковариантной производной этого же вектора. Если $A_i(x^1, \dots, x^k)$ являются компонентами ковариантного вектора, то dA_i не являются, вообще говоря, компонентами какого бы то ни было ковариантного вектора. Однако можно доказать, что

$$DA_p = dA_p - A_i \Gamma_{pk}^i dx^k \quad (27)$$

являются компонентами ковариантного вектора и

$$A_{p;k} = \frac{\partial A_p}{\partial x^k} - A_i \Gamma_{pk}^i \quad (28)$$

являются компонентами ковариантного тензора второй валентности. Вектор DA_p называется ковариантным дифференциалом вектора A_p и $A_{p;k}$ – ковариантной производной этого же вектора.

Примечание 2. Ковариантное дифференцирование тесно связано с понятием параллельного переноса вектора. Параллельный перенос вектора в евклидовом пространстве определяется как перенос вдоль некоторой прямой таким образом, что угол между вектором и прямой остается при переносе постоянным. Соответственно, компоненты вектора при таком переносе остаются неизменными. В неевклидовой геометрии эта операция несколько изменяется. Аналогом прямой в неевклидовой геометрии является геодезическая линия. Параллельный перенос вектора определяется как перенос вдоль геодезической линии, которая соединяет две точки. Естественно, как и в евклидовой геометрии, угол между переносимым вектором и геодезической линией остается постоянным.

Рассмотрим теперь вопросы о параллельном переносе векторов и тензоров в римановом пространстве.

Параллельный перенос векторов и тензоров в римановом пространстве

Прежде всего, опишем на простых примерах особенности параллельного переноса векторов и тензоров в римановых пространствах по сравнению с евклидовым пространством.

Пример 5: Параллельный перенос векторов и тензоров. Рассмотрим вектор (A^1, A^2) , заданный в декартовых координатах на евклидовой плоскости в точке p_1 . Если этот вектор перенести в точку p_2 таким образом, чтобы он все время оставался параллельным самому себе, то, очевидно, его компоненты (A^1, A^2) во время этого переноса сохранят свои значения, которые они имели в точке p_1 . Совершенно иная картина будет в криволинейных координатах.

Совершим, например, преобразование координат по формулам

$$x'^1 = x^1 + a(x^2)^2; \quad x'^2 = x^2 + b(x^1)^2. \quad (29)$$

В таком случае имеем

$$A'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^r} A^r = A^1 + 2ax^2 A^2; \quad A'^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^r} A^r = A^2 + 2bx^1 A^1. \quad (30)$$

Допустим, что точки p_1 и p_2 имеют координаты (x^1, x^2) и $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$, соответственно. Воспользовавшись (29), легко получить также штрихованные координаты этих точек:

$$\left. \begin{aligned} x'^1 &= x^1 + a(x^2)^2 \\ x'^2 &= x^2 + b(x^1)^2 \end{aligned} \right\} \text{ для точки } p_1; \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned} x'^1 + dx'^1 &= x^1 + a(x^2)^2 + dx^1 + 2ax^2 dx^2 \\ x'^2 + dx'^2 &= x^2 + b(x^1)^2 + dx^2 + 2bx^1 dx^1 \end{aligned} \right\} \text{ для точки } p_2.$$

Воспользовавшись теперь формулами (30), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} A'^1(x'^1 + dx'^1; x'^2 + dx'^2) &\neq A'^1(x'^1; x'^2); \\ A'^2(x'^1 + dx'^1; x'^2 + dx'^2) &\neq A'^2(x'^1; x'^2), \end{aligned} \tag{32}$$

в то время как в системе координат $(x^1; x^2)$ имеем

$$\begin{aligned} A^1(x^1 + dx^1; x^2 + dx^2) &= A^1(x^1; x^2); \\ A^2(x^1 + dx^1; x^2 + dx^2) &= A^2(x^1; x^2). \end{aligned} \tag{33}$$

Итак, в криволинейных координатах в результате параллельного переноса компоненты вектора получают некоторые дополнительные приращения. Нетрудно показать, что в общем случае криволинейных координат на евклидовой плоскости приращения компонент вектора при его параллельном переносе определяются как:

$$dA^i = -\Gamma_{pk}^i A_p dx^k. \tag{34}$$

Следовательно, при параллельном переносе вектора

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{pk}^i A_p dx^k = 0, \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

По аналогии с этим результатом будем говорить, что в римановом пространстве любого числа измерений вектор A^i в точке (x^1, \dots, x^n) и вектор $A^i + dA^i$ в точке $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ параллельны между собой, если

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{pk}^i A^p dx^k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{36}$$

При выполнении условия (36) будем говорить также, что вектор $A^i + dA^i$ в точке $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ получен из вектора A^i в точке (x^1, \dots, x^n) параллельным переносом.

Аналогичное определение параллельного переноса может быть дано для любого тензора. Фундаментальное значение параллельного переноса заключается в том, что оно инвариантно относительно преобразования координат.

Для того, чтобы перенести вектор A_0^i из точки $p_0(x^1, \dots, x^n)$ в другую точку $p_1(x^1, \dots, x^n)$, необходимо прежде всего выбрать кривую $x^i = x^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, соединяющую точки p_0 и p_1 , для которой $x_0^i = x^i(t_0)$ и $x_1^i = x^i(t_1)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, и затем проинтегрировать систему уравнений типа (36) в виде:

$$\frac{dA^i}{dt} + \Gamma_{pk}^i A^p dx^k = 0 \tag{37}$$

при начальных условиях $A^i(t_0) = A_0^i$. Если вектор $A(t)$ является решением системы уравнений (37) при указанных начальных условиях, то вектор $A^i(t_1)$ будет тем вектором, который получается в результате параллельного переноса вектора A_0^i из точки p_0 в точку p_1 вдоль кривой $x^i = x^i(t)$. Итак, параллелизм векторов зависит, в общем случае, от кривой, соединяющей начальную и конечную точ-

ки. Однако в евклидовом (или псевдоевклидовом) пространстве параллелизм векторов не зависит от кривой, вдоль которой производится параллельный перенос вектора. Следовательно, в каждой точке евклидова (или псевдоевклидова) пространства существует только один вектор $A^i(x^1, \dots, x^n)$, параллельный данному вектору $A_0^i(x_0^1, \dots, x_0^n)$.

Сравнивая уравнение (37) с уравнением геодезической (23) видим, что в любом римановом пространстве вектор dx^i/ds , касательный к геодезической, переносится параллельно вдоль геодезической.

Уравнения Гамильтона-Якоби в метрических римановых пространствах и девиация геодезических линий

Подробный анализ свойств уравнения Гамильтона-Якоби показал, что в заданном пространственно-временном континууме с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ уравнения

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\alpha} \frac{\partial S(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\beta} = 1; \tag{38}$$

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\alpha} \left(\frac{\partial S(x^\alpha, r^\beta)}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^\mu r^\nu \frac{\partial S(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\mu} \right) = 0, \tag{39}$$

являются уравнениями Гамильтона-Якоби (38) и уравнениями девиации геодезических линий (39).

Примечание 3. В уравнениях (38) и (39) кривые $x^\alpha = \xi^\alpha(\tau)$ рассматриваются как семейство геодезических линий, проходящих в момент $\tau = \tau_0$ через одну и ту же точку $\xi^\alpha(\tau_0)$. Вдоль каждой из этих геодезических линий рассматривается векторное поле, образованное семейством девиации геодезических линий с компонентами $r^\alpha = r^\alpha(\tau)$ таких, что каждый член из семейства принимает одинаковое значение $r^\alpha(\tau_0)$ в точке $\xi^\alpha(\tau_0)$. Это семейство порождает значение действия, которое является решением (38).

В компактной форме записи через ковариантные производные $D = d/d\lambda + \Gamma_{kl}^i u^k$ (где u^k – касательный вектор к кривой x^α) уравнение геодезических линий как бихарактеристики уравнения Гамильтона-Якоби (38) имеет вид:

$$D \left(\frac{\xi^\alpha}{\sqrt{\xi_\rho \xi^\rho}} \right) = 0, \tag{40}$$

а для девиации геодезических линий

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{h_{\alpha\beta}}{\sqrt{\xi_\rho \xi^\rho}} \frac{Dr^\beta}{d\tau} \right) + \frac{1}{\sqrt{\xi_\rho \xi^\rho}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi^\beta r^\gamma \xi^\delta = 0, \tag{41}$$

где $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{\sqrt{\xi_\rho \xi^\rho}}$.

Следует отметить, что уравнения (40), (41) могут быть получены из вариационного принципа (принципа наименьшего действия) в двух эквивалентных формах⁵:

$$S_1[\gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta} d\tau; \quad S_1[\gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta d\tau \tag{42}$$

и

⁵ Bazanski S.L. Hamilton-Jacobi formalism for geodesics and geodesic deviations // J. Math. Phys. – 1989. – Vol. 30. – № 5. – Pp. 1018-1029.

$$S_1(\gamma, r) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} g_{\alpha\beta}(\xi) \frac{\dot{\xi}^\alpha}{\sqrt{\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}^\rho}} \frac{Dr^\alpha}{d\tau} d\tau; \quad S_2(\gamma, r) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \frac{Dr^\beta}{d\tau} d\tau, \quad (43)$$

соответственно. В координатной форме уравнение для геодезических линий (40) имеет вид:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (44)$$

Пример 6: В отсутствие внешних возмущений пробная частица с массой m движется вдоль геодезической линии (44). При наличии внешнего возмущения f^μ положение пробной частицы в близлежащей позиции x'^μ должно удовлетворять обобщенному уравнению геодезических линий

$$\frac{d^2 x'^\mu}{ds^2} + \Gamma'^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx'^\alpha}{ds} \frac{dx'^\beta}{ds} = \frac{1}{m} f^\mu, \quad (45)$$

где f^μ описывает внешнюю (негравитационную) силу, действующую на частицу. Координаты x'^μ задаются как $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, где δx^μ является малой величиной отклонения.

Тогда в первом приближении символы Кристоффеля можно определить как

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta}(x + \delta x) = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} \delta x^\lambda, \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} = \partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta} / \partial x^\lambda. \quad (46)$$

В результате уравнение движения для отклонения δx^μ записывается как

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\delta x^\alpha}{ds} \frac{d\delta x^\beta}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \delta x^\lambda = f^\mu. \quad (47)$$

При $f^\mu = 0$ из (47) следует уравнение Широкова⁶ для описания отклонений траекторий от геодезических линий.

Пример 7: Рассмотрим случай взаимодействия пробной частицы с внешней средой в виде сил трения. Введем в рассмотрение 4-скорость возмущенного движения в виде $\delta V^\mu = d\delta x^\mu / ds$. При этом δV^μ удовлетворяет условию: $u_\mu \delta V^\mu = 0$, где 4-скорость $u^\mu = dx^\mu / ds$ для времени подобной мировой линии x^μ . В нерелятивистском случае силы трения задаются в виде $f_{\text{от}}^l = -mvv^l$, где v^l – компоненты нерелятивистской скорости, v – коэффициент трения. Релятивистское обобщение сил трения требует введения тензора трения v_α^μ , который задается⁷ в виде $v_\alpha^\mu = vm(\delta_\alpha^\mu + \delta V_\alpha \delta V^\alpha)$. Тогда силы трения могут быть выражены как

$$f_{\text{от}}^\mu = -v_\alpha^\mu (\delta V^\alpha - U^\alpha) = -mv(\delta_\alpha^\mu + \delta V_\alpha \delta V^\alpha)(\delta V^\alpha - U^\alpha). \quad (48)$$

Допустим, что Гауссовское случайное векторное поле $m\xi^\mu[g; x]$, где g – детерминант метрического тензора, определяемый следующими корреляционными параметрами: $\langle \xi^\mu[g; x] \rangle = 0$ и $\langle \xi^\mu[g; x] \xi^\nu[g; y] \rangle = D^{\mu\nu}[g; x; y]$, где $D^{\mu\nu}[g; x; y]$ – ядро случайного тензора. С физической точки зрения $m\xi^\mu[g; x]$ представляет собой случайную силу, воспроизводимую взаимодействием частиц с внешним тепловым термостатом.

Тогда движение возмущенного случайными силами частиц может быть описано⁸ обобщенным релятивистским уравнением типа Ланжевена:

⁶ Shirokov M.F. One new effect of Einstein's theory of gravitation // General Relativity and Gravitation. – 1973. – Vol. 4. – № 1. – Pp. 131-136; A. Nduka, On Shirokov's «One new effect of the Einsteinian theory of gravitation» // General Relativity and Gravitation. – 1977. – Vol. 8. – № 5. – Pp 347-351.

⁷ Dunkel J., Hanggi P. Relativistic Brownian motion // Physics Reports. – 2009. – Vol. 471. – № 1. – Pp. 1-73.

⁸ Harko T., Mocanu G. Stochastic oscillations of general relativistic disks // arXiv:1201.2218 [gr-qc]. – 2012.

$$\frac{d\delta V^\mu}{ds} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \delta V^\beta + \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^\mu u^\alpha u^\beta \delta x^\lambda = -v(\delta_\alpha^\mu + \delta V_\alpha \delta V^\mu)(\delta V^\alpha - U^\alpha) + \xi^\mu [g; x]. \quad (49)$$

Обсудим кратко физическую и геометрическую интерпретации явления параллельного переноса и девиации (вариации) геодезических линий, наиболее трудно воспринимаемых в процессах обучения инженерной аудитории. Корректная физическая интерпретация данного явления имеет практическое значение при разработке процессов извлечения, обработки и формирования баз знаний, например, для ИСУ космическими летательными аппаратами.

Пример 8: Девиации (вариации) геодезических линий. Девиацией (вариацией) двух бесконечно близких геодезических линий называется отклонение этих линий между собой. Рассмотрим две бесконечно близкие геодезические линии. Одна линия характеризуется несколькими параметрами. Выберем два из них. Один параметр назовем аффинным параметром вдоль линии. Вторым параметром выберем так, чтобы он отсчитывался вдоль направления вектора, который соединяет две указанные геодезические линии и является перпендикулярным вектору, касательному первой геодезической линии. Теперь уравнение геодезической является функцией двух параметров. Первый параметр отсчитывает длину вдоль геодезической, второй параметр отсчитывает «номер» геодезической линии, т.е. координату в перпендикулярном направлении.

Кратко рассмотрим метод вывода уравнения девиации геодезической. Пусть \bar{x}^μ представляет собой геодезическую линию, для которой известно аналитическое описание во временной области и необходимо оценить вид коррекции для вывода более общей формы орбиты движения по отклонению от геодезической. Более точно, согласно отмеченному выше, в методе определения девиации геодезических линий задается вид известной геодезической кривой, и затем вычисляются близлежащие геодезические путем определения пространственно-временного вектора, соединяющего точки заданной орбиты с точками неизвестной геодезической.

Допустим, что $x^\mu [\tau; \sigma]$ представляет непрерывное семейство геодезических линий, собственное время τ действует как аффинный параметр и σ является меткой геодезических линий заданного семейства. Пусть $x^\mu(\tau) = x^\mu[\tau; 0]$ и определяется в виде известной геодезической линии, которая задается в виде (44) как ковариантная производная:

$$\frac{D^2 \bar{x}^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2 \bar{x}^\mu}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\tau} \frac{d\bar{x}^\nu}{d\tau} = 0, \quad (50)$$

где $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}[\bar{x}^\mu(\tau)]$ является связностью на геодезической кривой $\bar{x}^\mu(\tau)$.

Девиация геодезических линий геометрически может быть проинтерпретирована следующим образом. Предположим, что $x^\mu(s)$ – близлежащая геодезическая к заданной эталонной геодезической $x_0^\mu(s)$ и упомянутые две геодезические являются членами ансамбля в виде:

$$x^\mu(s) = x^\mu(s, p), \quad x_0^\mu(s) = x_0^\mu(s, p_0).$$

Из разложения в ряд Тейлора следует, что

$$\begin{aligned} x^\mu(s, p) &= x_0^\mu(s, p_0) + (p - p_0) \frac{\partial x^\mu}{\partial p} \Big|_{(s, p_0)} + \frac{1}{2} (p - p_0)^2 \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial p^2} \Big|_{(s, p_0)} + \dots = \\ &= x_0^\mu(s) + \delta x^\mu(s) + \frac{1}{2!} \delta^2 x^\mu(s) + \frac{1}{3!} \delta^3 x^\mu(s) + \dots, \end{aligned}$$

где более компактное обозначение $\delta^n x^\mu(s)$ описывает девиации геодезических линий n -го порядка. Поскольку $(p - p_0)$ предполагается малой величиной, то можно положить $(p - p_0) = \varepsilon$. Вариация первого порядка является вектором, т.е. $\delta x^\mu(s) = (p - p_0) n_0^\mu(s) = \varepsilon n_0^\mu(s)$.

Но вариация второго порядка не является вектором, а поэтому задается как⁹

$$\delta^2 x^\mu(s) = (p - p_0)^2 (k^\mu - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu n^\lambda n^\nu).$$

Таким образом, близлежащие геодезические могут быть определены из выражения

$$x^\mu[\tau; \sigma] = \bar{x}^\mu(\tau) + \sigma n^\mu(\tau) + \frac{1}{2} \sigma^2 m^\mu(\tau) + \dots = \bar{x}^\mu + \sigma n^\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 (k^\mu - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu n^\lambda n^\nu) + \dots \quad (51)$$

В данном выражении вектора n^μ и k^μ определены в ковариантном виде:

$$n^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}, \quad k^\mu = \left. \frac{Dn^\mu}{D\sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial n^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} + \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu n^\lambda n^\nu. \quad (52)$$

Параметр σ по своей физической сущности определяет расстояние между возмущенной и исходной траекториями геодезических линий для момента времени $\tau = 0$ в виде:

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Big|_{\tau=0}. \quad (53)$$

Подставляя (51) в уравнение геодезической линии (50), получим последовательность ковариантных дифференциальных уравнений для корректирующих параметров в виде n^μ и k^μ .

Первым в этой последовательности является уравнение девиации геодезических линий (уравнение Якоби)

$$\frac{D^2 n^\mu}{D\tau^2} - \bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu \bar{u}^\mu \bar{u}^\lambda n^\nu = 0 \quad (54)$$

и (уравнение Бажаньского)

$$\frac{D^2 k^\mu}{D\tau^2} - \bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu \bar{u}^\mu \bar{u}^\lambda n^\nu = D_\rho \bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu (\bar{u}^k \bar{u}^\lambda n^\nu n^\rho - \bar{u}^\nu \bar{u}^\rho n^k n^\lambda) + 4 \bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu \bar{u}^\lambda n^\nu \frac{Dn^k}{D\tau}, \quad (55)$$

где $\bar{u}^\mu \equiv d\bar{x} / d\tau = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right|_{\sigma=0}$ является 4-вектором скорости начальной позиции пробной частицы на

геодезической, а риманов тензор $\bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu$ вычисляется по метрике пространства-времени $\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\mu)$ вдоль данной геодезической в следующем виде:

$$R_{skp}^i = \frac{\partial}{\partial x^p} \Gamma_{sk}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{sp}^i + \Gamma_{sk}^r \Gamma_{rp}^i - \Gamma_{ps}^r \Gamma_{rk}^i. \quad (56)$$

Величины R_{skp}^i являются компонентами смешанного тензора, который носит название тензора кривизны Римана-Кристоффеля.

Примечание 4. Из тензора Римана-Кристоффеля R_{skp}^i можно путем свертывания получить новый тензор, который носит название тензора Риччи $R_{pk} = R_{kps}^s$, который имеет большое значение в теории гравитационного поля. Умножив тензор Риччи R_{pk} на фундаментальный тензор g^{sl} и произведя свертывание по всем индексам, получим инвариант, который носит название *скалярной кривизны* $R = g^{pk} R_{pk}$. Следует отметить, что уравнение (54) можно рассматривать как определение риманова тензора $\bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu$ что согласуется с физической интерпретацией: риманов тензор $\bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu$ является мерой кривизны пространства-времени, которую можно определить из наблюдения изменения относительного расстояния между близлежащими геодезическими. И, наоборот, при заданном римановом тензоре $\bar{R}_{\lambda\nu k}^\mu$, как меры кривизны, можно определить вариации геодезических линий.

⁹ Kerner R., van Holten J.W., Colistete R. Relativistic epicycle: another approach to geodesic deviations // arXiv:gr-qc/0102099v2. – 2001; Colistete Jr R., Leygnac C., Kerner R. Higher-order geodesic deviations applied to the Kerr metric // arXiv:gr-qc/0205019v1. – 2002.

По определению $m^\mu \equiv k^\mu - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu n^\lambda n^\nu$ и, переопределяя риманов тензор, уравнения для девиации линий первого порядка можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} + 2\bar{u}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} + \bar{u}^k \bar{u}^\lambda \partial_\nu \bar{\Gamma}_{k\lambda}^\mu n^\nu = 0, \tag{56}$$

и для девиации второго порядка

$$\frac{d^2 m^\mu}{d\tau^2} + 2\bar{u}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \frac{dm^\nu}{d\tau} + \bar{u}^k \bar{u}^\lambda \partial_\nu \bar{\Gamma}_{k\lambda}^\mu m^\nu = S^\mu [n], \tag{57}$$

где $S^\mu [n]$ в уравнении вариации геодезических линий второго порядка зависит от решений уравнений первого порядка и определяется в виде:

$$S^\mu [n] = -2\bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \frac{dn^\lambda}{d\tau} \frac{dn^\nu}{d\tau} - 4\partial_k \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \bar{u}^\lambda n^k \frac{dn^\nu}{d\tau} - \partial_\sigma \partial_k \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu \bar{u}^\lambda \bar{u}^\nu n^\sigma n^k. \tag{58}$$

Остановимся кратко на интерпретации¹⁰ уравнения (54) для девиации геодезических траекторий.

Гравитационное поле, в терминологии Ньютона, вызывают «приливные силы», которые приводят к ускорению близлежащих частиц, движущихся относительно друг друга. Это явление приводит к расхождению во времени соответствующих геодезических траекторий движения частиц. В ОТО такое поведение пробных частиц (без заряда и спина) описывается уравнением типа (54) в обобщенном виде как $\frac{D^2 Z^\mu}{d\tau^2} = R^\mu_{\alpha\beta\nu} u^\alpha u^\beta Z^\nu$, где $R^\mu_{\alpha\beta\nu}$ являются компонентами *риманова тензора кривизны*,

u^α являются компонентами 4-х вектор скорости $u = u^\alpha \partial_\alpha$ (фидуциальной) системы отсчета частицы, движущейся вдоль времени подобной геодезической линии $\gamma(\tau) \equiv \{x^0(\tau), \dots, x^{D-1}(\tau)\}$, $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$,

параметр τ является собственным временем (так что $u \cdot u \equiv g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$), и Z^μ являются компонентами разделяющего вектора $Z = Z^\mu \partial_\mu$, который соединяет собственную систему отсчета частицы с другой близлежащей пробной тестирующей частицы, движущейся вдоль времени подобной геодезической линии $\bar{\gamma}(\tau)$.

Такая ситуация визуально представлена на рис. 1.

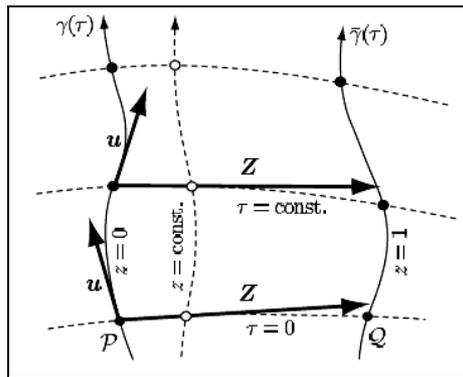


Рис. 1. Девиация геодезических траекторий

Приведенное уравнение точно описывает относительное ускорение двух близлежащих частиц с помощью второй абсолютной (ковариантной) производной векторного поля Z вдоль $\gamma(\tau)$ как

$$\frac{D^2 Z^\mu}{d\tau^2} = (Z^\mu_{;\gamma} u^\mu)_{;\delta} u^\delta = Z^\mu_{;\gamma\delta} u^\gamma u^\delta$$

в терминах тензора локальной кривизны и действительного относительного положения частиц, описываемых разделительным вектором $Z(\tau)$ в момент времени τ .

¹⁰ Podolsky J., Svarc R. Interpreting spacetimes of any dimension using geodesic deviation // arXiv:1201.4790v2 [gr-qc]. – 2012.

Следовательно, в D -мерном криволинейном пространстве близлежащие пробные частицы, движущиеся вдоль геодезических линий, ускоряются по направлению движения или на расстоянии друг от друга, как задано уравнением (60). Здесь u определяет вектор скорости пробной частицы, и $Z(\tau)$ описывает разделяющий вектор, который определяет действительное относительное положение второй пробной частицы в данный момент собственного времени τ .

В задачах релятивистской навигации и разработки геометрических моделей квантовых алгоритмов особую роль играют модели параллельного переноса векторов и тензоров.

Рассмотрим некоторые обобщения уравнения (50).

Модели параллельного переноса векторов и тензоров в метрических римановых пространствах

Приведем несколько примеров, поясняющих различия в моделях параллельного переноса в метрических римановых пространствах.

Пример 9: Модели параллельного переноса векторов и тензоров в римановом пространстве.

1. *Модель параллельного переноса Леви-Чивита.* Обобщением уравнения (50) является уравнение параллельного переноса вектора u^j вдоль геодезической кривой C , заданной уравнением $x^i(s)$, в виде переноса Леви-Чивита как:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (59)$$

При $u^j = dx^j / ds$ получим из уравнения (59) уравнение геодезических линий (50).

Отметим, что уравнение (59) не меняет вид при преобразовании параметра s .

2. *Модель параллельного переноса Ферми.* Обобщением (59) является уравнение параллельного переноса по Ферми следующего вида:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j \frac{dx^k}{ds} = -g_{kp} u^p \left(\frac{d^2 x^p}{d\tau^2} + \Gamma_{lm}^p \frac{dx^l}{d\tau} \frac{dx^m}{d\tau} \right) \frac{dx^i}{ds}. \quad (60)$$

Уравнение (60) выведено в 1922 г. Ферми¹¹ для векторов, ортогональных к направлению сдвига, удовлетворяющих уравнению

$$g_{ij} u^i \frac{dx^j}{d\tau} = 0, \quad ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (61)$$

Как и в случае сдвига Леви-Чивита (59), так и в случае (60) сдвига вдоль кривой C по Ферми, длины векторов и углы между ними сохраняются. Существенное отличие (60) от (59) состоит в том, что вектор (перпендикулярный к C) при сдвиге вдоль этой кривой, согласно (60) остается перпендикулярным к C ; при сдвиге (59) по Леви-Чивита данное условие выполняется только в том случае, если кривая C – геодезическая (50).

Бесконечно малый сдвиг по Ферми можно рассматривать как суперпозицию сдвига бесконечно малого параллельного сдвига по Леви-Чивита (59) и последующего вращения сдвинутых векторов. При этом вращение должно обеспечивать ортогональность вектора к касательной C и происходить в плоскости, определяемой этой касательной и параллельно сдвинутым вектором.

Таким образом, если материальная точка линии не движется по геодезической, то закон Леви-Чивита (59) должен быть заменен на закон Ферми (60).

Пример 10: Выберем четыре взаимно ортогональных единичных вектора $e_{(1)}^i, e_{(2)}^i, e_{(3)}^i, e_{(0)}^i = dx^i / ds$ в виде:

¹¹ Ферми Э. О явлениях, происходящих вблизи от мировой линии // Научные Труды Э. Ферми. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – С. 64-71.

$$g_{ij}e_{(\alpha)}^i e_{(\beta)}^j = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{ij}e_{(\alpha)}^i \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1 \quad (62)$$

в произвольной точке P мировой линии C материальной точки M . В первом выражении (62) знак минус означает, что вектора $e_{(\alpha)}^i$ пространственно подобны и составляют с времени подобным вектором *тетраду*. Если сдвигать векторы вдоль C так, что уравнение (62) сохраняется, то с помощью тетрады $\{e_{(\alpha)}^i, dx^i/ds\}$ определяется система отсчета, движущаяся совместно с точкой M . Если выполняется закон Ферми (60), то эта система отсчета движется поступательно.

Для псевдоевклидовой метрики $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}, g_{0\alpha} = g_{\alpha 0} = 0, g_{00} = 0$ имеем $\Gamma_{jk}^i = 0$, и закон сдвига Ферми (60) принимает вид:

$$\frac{de_{(\alpha)}^i}{d\tau} = -\frac{d^2 x_r}{ds^2} u_{(\alpha)}^r \frac{dx^i}{d\tau}. \quad (63)$$

При этом выполняется следующее соотношение для метрики:

$$-\sum_{\alpha} e_{(\alpha)}^i e_{(\alpha)}^j + \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = g^{ij}. \quad (64)$$

Таким образом, если с материальной точкой M некоторого тела связана описанным образом система координат, движущаяся совместно по закону переноса Ферми, то движение тела полностью описывается заданием мировой линии $C(\tau)$ точки M и заданием как функций τ координат $\eta_v^\alpha(\tau)$ каждой материальной точки v материального тела, относящихся к пространственным осям $e_{(1)}^i, e_{(2)}^i, e_{(3)}^i$ ($v = 1, 2, \dots, N$), где N – число точек тела. При этом под $\eta_v^\alpha(\tau)$ понимаются координаты пересечения мировых линий точек v с ортогональной к $C(\tau)$ трехмерной поверхностью пространственно-временного континуума. Если весь пространственно-временной континуум состоит из некоторого множества таких кривых C , заполняющих данный континуум непрерывным образом, то вводя вдоль каждой из этих кривых систему тетрад $\{e_{(\alpha)}^i, e_{(0)}^i\}$ указанным способом, получим неголономное тетрадное поле.

Известно, что в общей теории относительности (ОТО) введение псевдоевклидового пространства возможно только локально во всех точках кривой C . Соответствующие координаты $\eta_v^\alpha(\tau)$ определяются в ОТО с точностью до преобразований, связаны (по определению) с видом кривой C и называются *координатами Ферми*.

Если семейство трехмерных поверхностей пространственно-временного континуума, зависящее от τ ортогонально к мировым линиям всех точек тела, то координаты $\eta_v^\alpha(\tau)$ постоянны, и движение называется твердым и поступательным.

Таким образом, если линия C – геодезическая, то во всех своих точках она может быть сопутствующей мировой линией в системе координат y^i , для которой коэффициент связности равен нулю.

Пример 11: Восстановление метрики (64) связано с процессами измерения параметров траектории кривой C , которые имеют границы точности. Приведенные результаты могут обобщены, если учитывать ограничения на точность измерения путем изменения определения ковариантной производной D . Например, если измеряемая величина x лежит в интервале $(x + L^*, x - L^*)$, т.е. точность измерения Δx не может быть меньше величины L^* ($\Delta x \geq L^*$), то в этом случае ковариантная производная определяется как

$$DA = A_{i,l} = \partial_l A_i + \Gamma_{in}^k \partial_l A_k L^* u^n - \tilde{\Gamma}_{il}^k A_k, \quad (65)$$

где аффинная связность $\tilde{\Gamma}_{il}^k$ риманова пространства зависит от величины параметра L^* как

$$\tilde{\Gamma}_{il}^k = \Gamma_{i,kl} + 2u^n L^* \Gamma_{i,kl} \Gamma_{in}^k.$$

Следовательно, используя (65), можно выписать уравнение геодезической типа (23) с неточно измеряемыми параметрами траектории движения пробного тела.

Пример 12: Репер Ферми-Уолкера. Допустим, что в каждой точке M на мировой линии C в соответствующей системе координат z^i с псевдоевклидовой метрикой определены координатные реперы ε_i ($i = 0, 1, 2, 3$) единичных векторов. Если принять предположение, что пространственные реперы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, перпендикулярные к 4-скорости $u = \varepsilon_0$, не поворачиваются в 3-мерном пространстве с координатами z^i при переходе из одной точки в соседнюю вдоль линии C , то такие реперы образуют подвижный репер вдоль C , который называется *репером Ферми-Уолкера*.

Рассмотрим репер ε_i^* , для которого в каждой точке M кривой C выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i, \quad \frac{d\varepsilon_i^*}{ds} = 0, \quad a_1 = \frac{d\varepsilon_0^*}{ds} = \frac{du^*}{ds}. \quad (66)$$

В этом случае репер ε_i^* ($i = 0, 1, 2, 3$) можно рассматривать как репер Ферми-Уолкера для геодезической линии, проходящей через точку M мировой линии C и касающейся ее в данной точке.

Пример 13: Модель параллельного переноса Ферми-Уолкера. Наряду с параллельным переносом тетрад и векторов Леви-Чивита (59) и Ферми (60) существует (66) и перенос Ферми-Уолкера. Рассмотрим времени подобную мировую линию, по которой может двигаться материальная частица. В качестве скалярного параметра выберем, как принято ранее, длину мировой линии s , отсчитываемую от некоторой точки. Другими словами, в качестве скалярного параметра выбирается собственное время частицы, так как существует соотношение $s = c\tau$. В таком случае перенос вектора a_i вдоль кривой C по Ферми-Уолкеру определяется соотношением

$$\frac{Da_i}{d\tau} = w^{ik} a_k; \quad w^{ik} = -w^{ki} = \frac{1}{c^2} (u^i A^{*k} - u^k A^{*i}); \quad A^{*i} \equiv \frac{Du^i}{d\tau}. \quad (67)$$

В общем виде перенос Ферми-Уолкера вектора F^i вдоль кривой C определяется как

$$\frac{dF^i}{ds} = bF_j (A^i B^j - A^j B^i) = bF [A, B], \quad A^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad (68)$$

где B^i и b – первая нормаль и первая кривизна линии C , соответственно. Как и в случае параллельного переноса Леви-Чивита, уравнения (67) и (68) определяют вектор F^i вдоль C , если F^i заданы в какой-либо точке на C .

Из (68) следует, что антисимметричный тензор w^{ik} определяется полностью формой кривой (движением частицы), а A^{*i} определяет 4-ускорение, и в локальной лоренцевой системе отсчета сводится к соответствующей величине в специальной теории относительности (СТО). Данный факт используется при решении задачи релятивистской инерциальной навигации.

Примечание 5. Отметим, в (68) вектор A^i является единичным касательным вектором к кривой C , заданной уравнением $x^i = x^i(s)$.

Из (68) следует одновременно, что единичный вектор $F^i = A^i$ претерпевает перенос Ферми-Уолкера

$$\frac{DA^i}{ds} = bA^i (A^i B^j - A^j B^i) \quad (69)$$

и совпадает с (67).

Так как u^i из (67) является 4-скоростью, то нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$u_i u^i = -c^2; \quad u_i A^i = 0; \quad \frac{Du_i u^i}{d\tau} = 0; \quad w^{ik} u_k = A^i = \frac{Du^i}{d\tau}. \quad (70)$$

Из (70) следует, что 4-скорость u^i вдоль мировой линии C претерпевает перенос Ферми-Уолкера. Из (67) получим

$$\frac{Da_i b^i}{d\tau} = (w^{ik} + w^{ki}) a_i b^i = 0, \quad (71)$$

т.е. перенос Ферми-Уолкера, как и параллельный перенос, оставляет неизменным скалярное произведение векторов $a_i(\tau)$ и $b_i(\tau)$.

Следовательно, тетраду $\mathfrak{E}_{(\alpha)}^*(P)$ в произвольной точке P можно получить из тетрады $\mathfrak{E}_{(\alpha)}^*(0)$ в точке 0 на кривой C , используя перенос Ферми-Уолкера.

Таким образом, если координатный вектор $\mathfrak{E}_{(\alpha)}^*(0)$ в точке 0 на кривой C параллелен 4-скорости u^i , то это свойство будет выполняться и при переносе вдоль всей кривой C . Для такого тетрадного поля во всех точках кривой C выполняются соотношения

$$\mathfrak{E}_{(0)}^i = \frac{u^i}{c}; \quad \mathfrak{E}_{(\alpha)}^i u_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad w^{ik} \mathfrak{E}_{(\alpha)k} = \frac{1}{c^2} u^i (A^k \mathfrak{E}_{(\alpha)k}).$$

В результате получим

$$\frac{D \mathfrak{E}^i(\alpha)}{d\tau} = w^{ik} \mathfrak{E}_{(\alpha)k} = \frac{1}{c^2} (A^l u^i - A^i u^l) \mathfrak{E}_{(\alpha)k} = \frac{1}{c^2} u^i (A^k \mathfrak{E}_{(\alpha)k}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (72)$$

В частном случае, когда кривая C является мировой линией свободно падающей частицы (искусственный спутник), для такой геодезической при $\lambda = \tau$ имеем $w^{ik} = 0$. Следовательно, перенос Ферми-Уолкера (72) в этом случае совпадает с параллельным переносом Леви-Чивита.

Из данного примера следует, что особенность переноса Ферми-Уолкера по отношению к переносу Леви-Чивита заключается в отличии от нуля 4-ускорения $A^i = \frac{Du^i}{d\tau}$, т.е., когда на частицу действуют силы типа электромагнитных. Таким образом, перенос Ферми-Уолкера не только сохраняет ортонормированный репер вдоль мировой линии C , но сохраняет также ортонормированный 3-репер $(\mathfrak{E}_{(\alpha)}^i, \alpha = 1, 2, 3)$, ортогональны к линии C .

Такая система координат позволяет физически корректно построить релятивистское обобщение ньютоновского понятия «не вращающейся системы отсчета», что важно для решения задачи релятивистской инерциальной навигации. Отметим, что если перенос Ферми-Уолкера применить к вектору F^i , ортогональному в некоторой точке на C к касательному вектору A^i из (68), то свойство ортогональности сохранится, а уравнение (68) примет более простой вид:

$$\frac{DF^i}{ds} = b A^i F_j B^j. \quad (73)$$

В данном случае (73) совпадает с переносом Ферми (63).

Таким образом, перенос Ферми является частным случаем переноса Ферми-Уолкера и применяется для случая, когда переносимый вектор F^i ортогонален к вектору A_i .

Рассмотрим теперь процесс переноса вектора по Ферми-Уолкеру как процесс управления: необходимо исследовать отклонение переноса вектора по Ферми-Уолкеру от параллельного переноса Леви-Чивита в общем случае.

Пример 14: Допустим, что начиная с точки $x(s_0)$, ортогональный репер $\mathfrak{E}_{(\alpha)}^i(s_0)$ сдвигается по закону параллельного переноса Леви-Чивита и закону переноса Ферми-Уолкера. По-прежнему будем

предполагать, что $\mathfrak{E}_{(0)}^i(s)$ есть касательный вектор к $x(s)$. Будем обозначать через $e_{(a)}^i(s)$ репер, сдвигаемый по закону переноса Леви-Чивита (в начальный момент $e_{(a)}^i(s_0) = \mathfrak{E}_{(a)}^i(s_0)$), а репер $\mathfrak{E}_{(a)}^i(s)$ – переносимый по закону Ферми-Уолкера.

Требуется найти вид матрицы преобразований $\{\mathcal{L}(s)\}$, осуществляющий пересчет наблюдаемых в репере $e_{(a)}^i(s)$ к реперу $\mathfrak{E}_{(a)}^i(s)$ типа

$$\{\mathfrak{E}_{(a)}^i(s)\} = e_{(a)}^i(s)\{\mathcal{L}(s)\}. \quad (74)$$

Закон преобразования (74) составляет в данном случае задачу управления отклонением Ферми-Уолкера от закона параллельного переноса Леви-Чивита.

Искомый вид матрицы $\{\mathcal{L}(s)\}$ совпадает с решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\{\mathcal{L}^{-1}(s)\} \frac{d}{ds} \{\mathcal{L}(s)\} = bc[B]. \quad (75)$$

Вид матрицы рассмотрен ниже.

Любое преобразование $\{\mathcal{L}(s)\}$ собственной группы Лоренца \mathcal{L} можно представить как последовательное выполнение шести вращений в координатных плоскостях; при этом три из этих вращений гиперболические, а три остальных вращения – круговые. Следовательно, решение $\{\mathcal{L}(s)\}$ системы (75) ищется в виде:

$$\{\mathcal{L}(s)\} = \exp\{u^1 N_1\} \exp\{u^2 N_2\} \exp\{u^3 N_3\} \exp\{\psi R_1\} \exp\{\vartheta R_2\} \exp\{\varphi R_3\}, \quad (76)$$

где R_α, N_β ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) – инфинитезимальные матрицы, описывающие круговые и гиперболические вращения. В явном виде эти матрицы записываются как:

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & R_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & R_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ N_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1/c^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & N_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & N_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (77)$$

Параметры ψ, ϑ, φ являются углами Эйлера пространственного вращения. В частности, ψ – угол прецессии, ϑ – угол нутации, а φ – угол собственного вращения.

Система (75) сводится к виду:

$$[M] \|u^\alpha\| = ck [D] \|B^\alpha\|,$$

где

$$[M] = \begin{bmatrix} ch \frac{u^2}{c} ch \frac{u^3}{c} & 0 & 0 \\ 0 & ch \frac{u^1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|B^\alpha\| = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \end{bmatrix}, \quad [D] = \exp\{\psi R_1\} \exp\{\vartheta R_2\} \exp\{\varphi R_3\},$$

а углы Эйлера по аналогии с кинематическими формулами Эйлера определяются в виде

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta = \frac{\dot{u}^2}{c} sh \frac{u^3}{c}, \\ \omega_y &= \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta = -\frac{\dot{u}^1}{c} sh \frac{u^3}{c} ch \frac{u^2}{c}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta = \frac{\dot{u}^1}{c} sh \frac{u^2}{c}. \end{aligned} \tag{78}$$

В (78) компоненты $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ характеризуют компоненты вектора мгновенной угловой скорости инфинитезимального пространственного вращения 3-репера $\{e_{(\alpha)}^i(s)\}$ для совпадения с $\{\Xi_{(\alpha)}^i(s)\}$. Это пространственное вращение, согласно (78), имеет вид:

$$\omega_x = \frac{\dot{u}^2}{c} sh \frac{u^3}{c}, \quad \omega_y = \frac{\dot{u}^1}{c} sh \frac{u^3}{c} ch \frac{u^2}{c}, \quad \omega_z = \frac{\dot{u}^1}{c} sh \frac{u^2}{c} \tag{79}$$

и является чисто релятивистским эффектом, называемым *прецессией Томаса*. При этом правая часть соотношений (79) возникает как следствие коммутационных соотношений вида

$$[N_1, N_2] = -\frac{1}{c^2} R_3, \quad [N_3, N_1] = -\frac{1}{c^2} R_2, \quad [N_2, N_3] = -\frac{1}{c^2} R_1.$$

Таким образом, для того, чтобы поле ортогональных реперов (74) претерпевало сдвиг по закону переноса Ферми-Уолкера, необходимо и достаточно выполнение соотношений для управлений углами Эйлера вида (78), (79). Данный результат позволяет получить одну из физических интерпретаций процесса переноса по Ферми-Уолкеру: релятивистски не вращающийся 3-репер можно получить, если 3-репер локальной мгновенно сопутствующей «инерциальной» системы отсчета обратно вращать на величину прецессии Томаса (79). Вид полученных соотношений (76) и (78) по форме совпадает с соотношениями пространства СТО, если в нем формально взять в качестве системы $\{M(\tau), e_{(\alpha)}^i(\tau)\}$ инерциальную систему. В математической модели это выражается тем, что при развертывании кривой $M(\tau)$ вместе с оснащающими ее реперами (на касательное пространство $T_{M_{\tau_0}}$) параллельно переносимые реперы $\{M(\tau), e_{(\alpha)}^i(\tau)\}$ отобразятся в фиксированный репер касательного пространства $T_{M_{\tau_0}}$. Это дает основание ввести параллельно переносимую (с частицей на $M(\tau)$) галилееву систему в качестве локально инерциальной системы отсчета (для частиц на $M(\tau)$).

Примечание 6. Приведенные результаты позволяют исследовать процессы влияния кривизны пространства на кинематические эффекты и дать анализ процессов измерений свободно падающими наблюдателями. Например, с физической точки зрения модель свободно падающего (ориентированного) наблюдателя интересна тем, что ее пространственные оси связаны с гироскопами, движущимися вместе с ними, так как параллельный перенос в данном случае сводится к переносу Ферми-Уолкера.

Обсудим в заключение некоторые дополнительные математические аспекты анализа моделей параллельного переноса, используемых в задачах релятивистской инерциальной навигации.

Анализ соотношений частных моделей параллельного переноса, используемых в задачах релятивистской инерциальной навигации

В общем случае 3-репер $\{e_{(\alpha)}^i(s)\}$ определен в каждой точке с произволом трех параметров. Однако в некоторых прикладных задачах релятивистской небесной механики удобно рассматривать специальные 3-реперы, которые в геометрической специализации классифицируются как 3-реперы, векторы которых образуют направления 1-го или 2-го рода. Первый случай был рассмотрен выше. Здесь остановимся на втором случае в виде 3-реперов Френе-Серре и его возможных обобщений.

Пример 15: Ортонормированные реперы Френе-Серре. Как и ранее, рассматриваются ортонормированные реперы, связанные с каждой точкой кривой C пространственно-временного континуума. Рассмотрим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{DA^i}{ds} = bB^i; & \frac{DB^i}{ds} = cC^i + bA^i; \\ \frac{DC^i}{ds} = dD^i - cB^i; & \frac{DD^i}{ds} = -dc^i \end{cases} \quad (80)$$

при условии

$$A^i A_i = -1, \quad B^i B_i = C^i C_i = D^i D_i = 1. \quad (81)$$

Коэффициенты b, c и d представляют собой неотрицательные скаляры.

Система уравнений (80) с условиями (81) определяет ортонормированные реперы и совместно называются формулами Френе-Серре. При этом величины B^i, C^i, D^i представляют собой первую, вторую и третью нормали к C , соответственно, а параметры b, c, d описывают первую, вторую и третью кривизны.

Из (80) при $A^i = dx^i / ds$ следует непосредственно модель параллельного переноса Ферми-Уолкера

$$\frac{DA^i}{ds} = bA_j (A^i B^j - A^j B^i) \quad (82)$$

в силу условий уравнений (80), (81) и условия ортогональности $A_i B^i = 0$.

Рассмотрим теперь одно из обобщений формул Френе-Серре и параллельного переноса.

Пример 16: Соотношение между формул Френе-Серре и параллельного переноса. Из современной геометрии известно, что произвольная кривая в пространственно-временном континууме описывается уравнениями вида $\kappa = \kappa(s), \tau = \tau(s)$, где κ, τ, s – кривизна, кручение и линейный элемент длины (как параметр) кривой C . Допустим, что кривая C описывается в параметрическом виде как $r = r(s)$. Пусть t – единичный касательный вектор к кривой C , n и b – первая и вторая нормали, соответственно. Тогда три вектора $\{t, n, b\}$ образуют 3-репер на этой кривой C . Формула Френе-Серре (80) для этого случая записывается в виде:

$$\dot{t} = \kappa n; \quad \dot{n} = -\kappa t + i b; \quad \dot{b} = -\tau n. \quad (83)$$

Приведем геометрическую интерпретацию для векторов $\{t, n, b\}$. При параллельном перенесении этих векторов в декартовой системе координат вдоль исходной кривой C концы этих трех векторов описывают три кривые на единичной сфере S^2 , так как все три вектора единичные. Сфера S^2 называется в данном случае сферическим изображением кривой C или индикатрисами касательного вектора t , первой n и второй b нормалей. Линейные элементы вдоль указанных на сфере S^2 кривых ds_t, ds_n, ds_b описываются в виде:

$$ds_i^2 = \kappa^2 ds^2; \quad ds_n^2 = (\kappa^2 + \tau^2) ds^2 = ds_i^2 + ds_b^2; \quad ds_b^2 = \tau^2 ds^2. \quad (84)$$

Если ввести вектор Дарбу $\xi = \tau t + \kappa b$, то формулы Френе-Серре (83) могут быть переписаны в компактном виде 1-формы как

$$\dot{t} = \xi \wedge t; \quad \dot{n} = \xi \wedge n; \quad \dot{b} = \xi \wedge b. \quad (85)$$

Отметим, что если точка движется на кривой C с единичной скоростью, то угловая скорость 3-репера $\{t, n, b\}$ задается вектором ξ . Если ξ не является производной от некоторого вектора $r = r(s)$, то он называется неголономным. Поэтому (rds) и (κds) являются замкнутыми, но не точными 1-формами: интегралы по замкнутому контуру от этих форм отличны от нуля. Угловая скорость 3-репера имеет компоненты относительно касательного вектора t и второй нормали b . Рассмотрим плоскость, перпендикулярную к t , которая движется вдоль кривой C с постоянной единичной скоростью. Вектора n и b расположены в этой плоскости. Но естественная система координат (n, b) вращается относительно t с угловой скоростью $\tau(s)$. Поэтому за промежуток s от $s = 0$ до

$s = s_0$ накапливает фазу угла $\Phi_1 = \int_0^{s_0} \tau(s) ds$ между n, b и соответствующей не вращающейся системой координат на этой плоскости. Данная не вращающаяся система координат определяется обычным параллельным переносом Ферми-Уолкера вдоль кривой C по (68) как

$$\frac{DA^i}{ds} = \kappa A^k (t^k n^i - t^i n^k) = \{\kappa b \wedge A\}^i. \quad (86)$$

Рассмотрим теперь касательную плоскость к кривой C на векторах $\{n(s), t(s)\}$, которая также движется с постоянной скоростью вдоль заданной кривой. Естественными осями системы координат в этой плоскости теперь являются вектора (t, n) , которые вращаются относительно вектора b с угловой скоростью $\kappa(s)$. Как и в предыдущем случае, за отрезок s от $s = 0$ до $s = s_0$ ориентация естественных осей и осей не вращающейся системы координат отличается на фазу угла

$$\Phi_2 = \int_0^{s_0} \kappa(s) ds.$$

По аналогии с переносом Ферми-Уолкера (86), для рассматриваемой не вращающейся системы координат имеем

$$\frac{DA^i}{ds} = \tau A^k (n^k b^i - n^i b^k) = \{\tau t \wedge A\}^i. \quad (87)$$

В отличии от (86), когда касательный вектор t параллельно переносится вдоль кривой C , в модифицированном переносе Ферми-Уолкера (87) данную роль выполняет вторая нормаль b .

Обобщением (86), (87) является перенос Ферми-Уолкера вида:

$$\frac{DA^i}{ds} = \{\kappa b \wedge A + \tau t \wedge A\}^i = \{\xi \wedge A\}^i, \quad (88)$$

в котором учитываются оба рассмотренных варианта (86) и (87) с привлечением вектора Дарбу.

Рассмотрим теперь связь формул Френе-Серре с монадным методом задания движения систем отсчета для компонент метрического тензора.

Пример 17: Связь монадного метода с формулами Френе-Серре. В монадном методе задается конгруэнция времени подобных мировых линий, количество которых можно задать бесконечно много. При этом разным конгруэнциям соответствуют разные движения систем отсчета. Единичный вектор вдоль касательной к мировой линии заданной конгруэнции, проходящей через выбранную точку, определяет 4-скорость u^μ соответствующего прибора (наблюдателя) системы отсчета $\tau^\mu = u^\mu = dx^\mu / ds$. По определению имеем $\tau^\mu \tau_\mu = \tau^\mu \tau^\nu g_{\mu\nu} = 1$. Для определения пространственных (и смешанных) $g_{\mu\nu}$ представляют в виде $g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}$, где $h_{\mu\nu}$ – тензорная величина и рассмат-

риваемый как метрический тензор локального пространственно подобного 3-мерного сечения, ортогонального τ^μ . Тензор имеет 10 компонент, из которых независимыми являются только шесть. Так же как из $g_{\mu\nu}$ дифференцированием по координатам получены символы Кристоффеля, из первых производных от τ^μ и получают несколько новых величин. Так, три из них являются тензорами, которые играют роль характеристик систем отсчета и называются физико-геометрическими тензорами.

Для этой цели ковариантная производная от τ^μ разбивается на симметричную и антисимметричную

части: $\tau_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}) + \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} + \tau_{\nu,\mu})$. Вводятся три тензорные величины $F_\alpha, A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}, D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$ вида:

$$F_\alpha = \tau^\nu (\tau_{\alpha,\nu} - \tau_{\nu,\alpha}); \quad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu; \quad D_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} + \tau_{\nu,\mu}) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu. \quad (89)$$

По определению система отсчета описывается безмассовой сплошной средой из приборов, а τ_μ описывает 4-скорость этих приборов. В данной интерпретации антисимметричный тензор $A_{\alpha\beta}$ из (89) является тензором угловой скорости вращения, а симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ является тензором скоростей деформаций системы отсчета. Физический смысл F_α определяется из анализа конструкции мировых линий. В каждой точке пространства-времени можно определить четверку ортонормированных векторов $(\tau^\mu, l^\mu, \beta^\mu, \gamma^\mu)$, сопровождающую тетраду по формулам Френе-Серре в виде:

$$\tau^\nu \tau_{,\nu}^\mu = R_1 l^\mu, \quad \tau^\nu l_{,\nu}^\mu = R_2^{\beta\mu} + R_1 \tau^\mu; \quad \tau^\nu \beta_{,\nu}^\mu = R_3 \gamma^\mu - R_2 l^\mu; \quad \tau^\nu \gamma_{,\nu}^\mu = -R_3 l^\mu, \quad (90)$$

где τ^μ направлено вдоль линии; $l^\mu, \beta^\mu, \gamma^\mu$ – первая, вторая и третья нормали соответственно; R_1, R_2, R_3 – первая, вторая и третья кривизны. Из (91) следует, что $R_1 l^\mu = F^\mu$; $R_1^2 = -F_\mu F^\mu$.

Таким образом, вектор F^μ определяет первую кривизну линий и является ускорением прибора системы отсчета; вторые и третьи кривизны определяются через первые и вторые производные от F_μ . Уравнение геодезических линий (23) и (44) после проектирования через τ^μ и h_μ^ν записывается в виде:

$$\frac{dm}{d\tau} = \rho^\mu F_\nu - D_{\alpha\beta} \rho^\alpha \varrho^\beta - h_\mu^\nu \left(\frac{d\rho^\mu}{d\tau} - N_\beta^\mu \rho^\beta \right) + L_{\alpha\beta}^v \rho^\alpha \rho^\beta = -mF^\mu - 2\rho^\beta (A_\beta^v - D_\beta^v), \quad (91)$$

где $N_\beta^\mu = \tau_\beta^\mu - \tau^\mu F_\beta$ – не тензорная величина; $L_{\alpha\beta}^v = \frac{1}{2} h^{\mu\lambda} (h_{\lambda\alpha,\beta} + h_{\lambda\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\lambda})$ – трехмерные «символы Кристоффеля».

Если сопоставить (91) с уравнением движения в неинерциальной системе отсчета в ньютоновой механике $\frac{d}{dt} \rho_{отн} = F - m a_{пер} - m a_{кор}$, где $a_{кор} = 2[\omega v_{отн}]$ или в тензорных обозначениях $a_{кор}^i = 2\omega_j^i v^j$; $\omega(\omega_{ij})$ – угловая скорость вращения системы отсчета; F – реальная сила, действующая на точку. В (91) отсутствует аналог силы F (так как это уравнение геодезических линий). Из сравнения правых частей следует, что F^v – ускорение; A_β^v – тензор угловой скорости вращения; D_β^v – тензор скорости деформации системы отсчета относительно локально геодезической системы отсчета с осью вращения вдоль τ^μ .

Примечание 7. Во многих задачах механики вводятся (промежуточные) системы отсчета переносного движения, состоящие из индивидуализированных точек с «вмороженными» координатными линиями. Системы отсчета переносного движения строятся глобально или локально (для каждого положения движущейся точки M). Голономный ньютоновой механики хорошо исследован и дано его релятивистское обобщение. Неголономные сопутствующие системы отсчета переносного движения в релятивистских условиях при наличии дополнительного пространственного 3-вращения исследова-

лись путем анализа кинематических обобщенных уравнений релятивистского континуума. При этом было получено, что результирующее релятивистское 3-вращение репера, сопутствующего частице M , следует рассматривать как сложное, состоящее из двух вращений: внешнего, определяемого вращением элемента среды, и внутреннего – добавочного (принудительного). При этом внешнее вращение складывается из прецессии Томаса и эффекта неинерциальности галилеевой системы (из которой наблюдается движение). Оба вращения (внешнее и внутреннее) являются независимыми. Такой подход является дополнением на случай неголономности системы отсчета и учета в явном виде принудительности вращения и относится по своему методу к тетрадному формализму. Данные вопросы частично рассмотрены в Части 2 данной статьи при анализе и конструировании систем отсчета в солнечной системе для задач релятивистской инерциальной навигации космических летательных аппаратов (КЛА).

Пример 18: Рассмотрим теперь уравнение геодезических линий в рамках квантовой геометрии с обобщением понятия в квантовых системах отсчета. В этом случае рассматривается 8-мерное фазовое пространство $x^\mu (q^r, p^s)$, $q^0 = ct$; $p^0 E / c$, метрикой ds^2 типа:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} x^2 + \frac{\hbar^2}{\mu^4 c^6} \left[\frac{1}{c^2} dE^2 - dp^2 \right], \quad (92)$$

где $E = mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{a^2}{A^2}$, $A = \frac{\mu^2 c^2}{m_0 \hbar}$ описывает пространство-времени квазиклассического

уровня с ограничением на максимальное собственное ускорение a для частицы в виде величины A , полученной из квантовых ограничений. Пространство-время, описываемое метрикой (92), является 8-мерным: первые четыре компоненты образуют пространство-время, описываемое 4-вектором $\{x^\mu \equiv (t, x/c)\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$; вторая группа 4-компонент, ортогональных к первой группе $\{x^\mu\}$,

пропорциональна 4-скорости $u^\mu = \frac{cdx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-g^2/c^2}}, \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{1-g^2/c^2}} \right) = (u^0, u)$. Событие в метрике

(92) описывается 8-компонентами $\xi^\mu = (t, x/c; w^0, w)$, $w^0 = u^0/k$, $w = u/k$, где k – нормирующий параметр. В этом случае 8-мерный пространственно-временной континуум определяется в виде

$$g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = dt^2 - (dx/c)^2 + (dw^0)^2 - (dw)^2. \quad (93)$$

В этом случае преобразования Лоренца для (93) принимает обобщенный вид:

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{1}{\Gamma} \left\{ dt - \frac{\mathcal{G}_0}{c^2} dx + \frac{a_0 \mathcal{G}_0}{ck_1} dw^0 - \frac{a_0}{k_1} dw^1 \right\}; \quad dx' = \frac{1}{\Gamma} \left\{ -\mathcal{G}_0 dt + dx - \frac{a_0}{k \mathcal{G}_0^2} cdw^0 + \frac{a_0}{k_1} \mathcal{G}_0 dw^1 \right\}; \\ dw^{0'} &= \frac{1}{\Gamma} \left\{ \frac{\mathcal{G}_0 a_0}{ck_1} dt - \frac{a_0}{ck_1} dx + dw^0 - \frac{\mathcal{G}_0}{c} dw^1 \right\}; \quad dw^{1'} = \frac{1}{\Gamma} \left\{ -\frac{a_0}{k_1} dt + \frac{\mathcal{G}_0 a_0}{c^2 k_1} dx - \frac{\mathcal{G}_0}{c} dw^0 + dw^1 \right\}; \quad (94) \\ \Gamma &= \sqrt{\left(1 - \frac{\mathcal{G}_0^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{a_0^2}{c^2}\right)}, \quad k_1 = k \left(1 - \frac{\mathcal{G}_0^2}{c^2}\right)^{3/2}, \quad a_0 \cong \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}. \end{aligned}$$

При $\mathcal{G}/c \ll 1$ и $c/k_1 \ll 1$ имеем $E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathcal{G}^2 + \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{a^2}{k^2}$.

Уравнение геодезических линий (как частный случай обобщения для квантового параллельного переноса) имеет вид:

$$\ddot{x}^\alpha + \frac{i}{\hbar} F_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu = 0, \quad (95)$$

где связность $\Gamma = -\frac{i}{\hbar} F$ задается в виде $F = p_r dq^r \begin{vmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - q^r dp_r \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{vmatrix}$, $\eta = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$.

Уравнение (95) для $x^\mu = (q^r, p^s)$ при заданном F распадается на систему уравнений

$$\ddot{q}^l + \frac{i}{\hbar} p_s \dot{q}^s \dot{q}^l = 0; \quad \ddot{p}^l - \frac{i}{\hbar} \dot{p}_s q^s \dot{p}^l = 0. \quad (96)$$

Если ввести обозначения $z = q - ip$, $\bar{z} = q + ip$, то из (96) при $\xi = \dot{z}^k$, $z^k = x^k + iy^k$, $\alpha_k = \gamma_k + i\omega_k$ имеем уравнение диссипативной системы

$$\ddot{x}^k + \gamma \dot{x}^k - \omega \dot{y}^k = 0; \quad \ddot{y}^k + \gamma \dot{y}^k + \omega \dot{x}^k = 0 \quad (97)$$

в виде системы связанных осцилляторов.

Заключение

В статье приведены необходимые сведения из дифференциальной геометрии. Основное внимание уделено описанию геодезических траекторий и девиации геодезических линий. Обсуждены модели параллельного переноса и их обобщение при наличии стохастических возмущений, действующих на пробные тела. Проведен анализ соотношений частных моделей параллельного переноса, используемых в задачах релятивистской инерциальной навигации.

Список литературы

1. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Теория моделей процессов управления: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука, 1978.
2. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.
3. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука, 1982.
4. Ульянов С.В. Физические модели интеллектуальных процессов управления: Квантовые, релятивистские и информационно-термодинамические аспекты. Автор. диссерт. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. – М.: ИФТП АН СССР, 1992.
5. Frolov V. P., Shoom A. A. Spinoptics in a stationary spacetime // arXiv:1105.5629v2 [gr-qc]. – 2011.
6. Palmer M. C., Takahashi M., Westman H. F. Localized qubits in curved spacetimes // arXiv:1108.3896v1 [quant-ph]. – 2011.
7. Ульянов С.В., Решетников Г.П., Мишин А.А.. Физическая корректность знаний и алгоритмическая сложность описания робастных моделей объектов управления. Ч. 1 // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011. – № 3. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/21>. – 0421000111\0025.
8. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. Relativistic celestial mechanics of the Solar system. - John Wiley & Sons. – 2011.
9. Седов Л.И., Цыпкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. – М.: Наука, 1989.
10. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955.
11. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
12. Мизнер К., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. – М.: Мир, 1973.
13. Закаров У.Н. Механика релятивистских космических полетов. – М.: Наука, 1984.
14. Turyshev S. Relativistic navigation: A theoretical foundation. – Report Jet Propulsion Lab. – 2006.
15. Hees A., Wolf P., Lamine B. et al Testing gravitation in the Solar system with radio science experiments // arXiv:1110.0659v2 [gr-qc]. – 2011.
16. Hees A., Wolf P., Lamine B. et al Radioscience simulations in general relativity and in alternative theories of gravity // arXiv:1201.5041v1 [gr-qc]. – 2012.
17. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: Иностранная литература, 1963.
18. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. – М.: Энергоатомиздат, 1985.