

АНАЛИЗ МАССОВОГО ПОВЕДЕНИЯ В МАРКОВСКИХ СИСТЕМАХ

Ершов Николай Михайлович

*Доцент, кандидат физико-математических наук;
ГБОУ ВО МО «Университет «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, д.19;
e-mail: ershovnm@gmail.com.*

Рассматриваются вопросы анализа неупорядоченного поведения дискретных моделей, построенных на основе марковских систем. Определяется понятие марковской системы, как стохастической строковой перезаписывающей системы, классифицируются типы поведения таких систем. Предлагается подход к количественному описанию массового поведения с использованием систем дифференциальных уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: клеточные автоматы, системы Линденмайера, дискретное моделирование, динамические системы.

ANALYSIS OF MASS BEHAVIOR IN MARKOV SYSTEMS

Ershov Nikolay

*Associate Professor, PhD in physics and mathematics;
Dubna State University,
Institute of the system analysis and management;
141980, Moscow reg., Dubna, 19 University st.;
e-mail: ershovnm@gmail.com.*

The problems of the analysis of the disordered behavior of discrete models constructed on the basis of Markov systems are considered. The concept of a Markov system as a stochastic string rewriting system is defined, and the patterns of behavior of such systems are classified. An approach to the quantitative description of mass behavior using systems of differential equations is proposed. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: cellular automata, Lindenmayer systems, discrete modeling, dynamic systems.

Введение

В работе рассматриваются вопросы, связанные с дискретным низкоуровневым моделированием естественных (химических и биологических) систем. Классические средства в этой области – это клеточные автоматы [1], системы Линденмайера (или L-системы) [2], и мембранные системы [3]. Однако особенности клеточных автоматов и L-систем не позволяют естественным образом моделировать, например, химические процессы, т.к. в них отсутствует механизм согласованного изменения состояний отдельных элементов, а основным предназначением мембранных систем является все же не моделирование, а анализ вычислительных возможностей микробиологических систем. В данной работе определяется понятие марковской системы, как стохастической строковой перезаписывающей системы, классифицируются типы поведения таких систем. Предлагается подход к количественному описанию массового поведения, присущего, например, химическим системам [4], с использованием систем дифференциальных уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов и сравнения результатов моделирования с теоретическими оценками.

1. Марковские системы

Марковские системы (далее просто М-системы) являются разновидностью строковых перезаписывающих систем, работа которых основана на использовании строковых подстановок. Свое название эта модель получила в силу большой ее схожести с алгоритмической моделью Маркова. Принципиальным отличием М-систем от других подобных моделей является ее стохастичность – применение подстановок определяется только вероятностным образом.

Особенностью марковских систем по сравнению с другими строковыми перезаписывающими системами (формальные грамматики, алгоритмы Маркова) является способ применения подстановок. Текущая цепочка символов на каждом шаге эволюции случайным образом разрезается на подцепочки, и далее все такие подцепочки одновременно заменяются новыми согласно заданному набору подстановок. Как и в стохастических L-системах, набор подстановок может содержать более одной подстановки с одинаковой левой частью – выбор нужной осуществляется вероятностным образом.

Назовем *подстановкой* тройку $\sigma = (\alpha, \beta, p)$, в которой α и β – цепочки в некотором алфавите. Цепочка α называется левой частью подстановки, цепочка β – ее правой частью; p – действительное число из интервала $[0, 1]$, вероятность применения подстановки. Для подстановки σ будем использовать обозначение $\alpha \xrightarrow{[p]} \beta$ (или $\alpha \rightarrow \beta$, если вероятность p применения подстановки равна единице). Назовем *М-системой* набор подстановок Σ , для которого выполняется следующее свойство: суммарная вероятность всех подстановок, имеющих одинаковую правую часть, не превышает единицы.

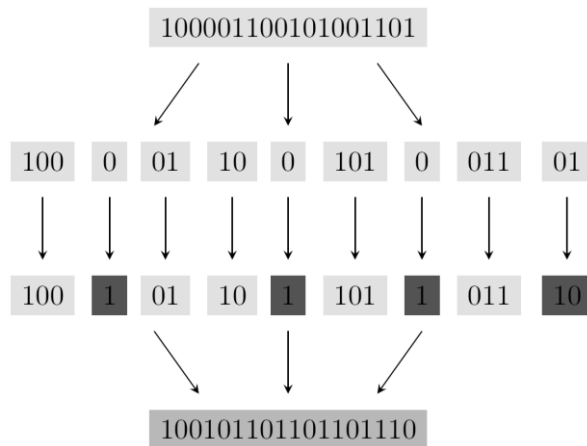


Рис. 1. Пример применения М-системы $\{01 \rightarrow 10_{[0.5]}, 0 \rightarrow 1\}$ к заданной цепочке

Процесс применения подстановок к заданной цепочке символов состоит в последовательном выполнении следующего алгоритма (рис. 1):

- текущая цепочка случайным образом разделяется на подцепочки – цепочка с вероятностью $(1 - \omega)$ разрывается после каждого ее символа;
- каждая полученная подцепочка заменяется новой согласно заданному набору подстановок с учетом их вероятностей (метод рулетки);
- все подцепочки, полученные в результате второго шага, соединяются и образуют новую текущую цепочку.

Моделирование с помощью марковской системы заключается в выборе начальной цепочки и последовательном применении к ней описанного алгоритма. Если для любого правила данной М-системы длина левой части равна длине ее правой части, то эволюция этой системы не меняет длины начальной цепочки. Такие системы могут рассматриваться, как некоторый вид блочных клеточных автоматов. Если же в системе имеется правило с несовпадающими длинами правой и левой частей, то длина цепочки может меняться. Такие системы оказываются ближе к системам Линденмайера.

Рассмотрим два простых примера М-систем. Первым примером является система, состоящая из единственной подстановки $\Sigma_1: a \xrightarrow{[p]} \lambda$. Применение этой системы к цепочке символов a^n (символ a , повторенный n раз) приводит к постепенной замене всех символов a исходной цепочки на «пустые» символы λ (рис. 2, вертикальная ось – время). Так как вероятность такой замены все время сохраня-

ется постоянной, то концентрация символов a (их количество, отнесенное к длине n всей цепочки) будет убывать по экспоненциальному закону.

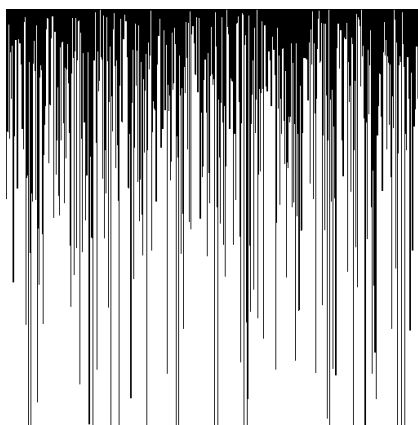


Рис. 2. Модель экспоненциального затухания

В качестве второго примера рассмотрим М-систему, являющуюся простейшей моделью диффузионного процесса: $\Sigma_2: a\lambda \leftrightarrow \lambda a$. Под действием данной системы каждый одиночный символ a совершает случайные блуждания по заданной цепочке. Если в начальной цепочке символы a образуют непрерывный кластер (рис. 3), то результатом применения данной системы будет постепенное размытие этого кластера, так что символы a в конце концов окажутся равномерно распределенными по всей цепочке (при том, что их количество будет сохраняться постоянным).

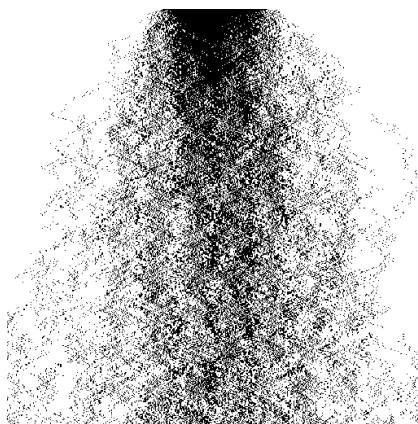


Рис. 3. Модель диффузии

М-системы, несмотря на свою принципиальную стохастичность, могут демонстрировать весьма широкий спектр типов поведения – от неупорядоченного, как в рассмотренных двух примерах, до упорядоченного (алгоритмического) [5]. Последнее оказывается возможным благодаря алгоритмической универсальности данной модели. С этой точки зрения, М-системы могут рассматриваться в качестве *параллельной* алгоритмической модели. В настоящей работе будут рассмотрены вопросы описания именно неупорядоченного поведения систем, в которых происходит постоянное активное перемешивание содержимого.

2. Массовые системы с постоянной длиной

Рассмотрим М-систему, которая содержит в себе *перемешивающую* подсистему подстановок, меняющую с вероятностью θ местами любые два соседних символа цепочки, при том, что вероятности всех остальных подстановок системы должны быть много меньше θ . Несложно убедиться, что поведение такой системы определяется большей частью концентрациями символов. Это обусловлено тем, что благодаря постоянному перемешиванию расположение отдельных символов в цепочке оказывается не важным и в результате вся цепочка может рассматриваться, как символьное *мультимножество*. Будем называть такого рода М-системы *массовыми*. Если для любой подстановки систе-

мы длины правой и левой частей совпадают, то такую систему будем называть М-системой с *постоянной длиной*. Очевидно, что эволюция такой системы не меняет длину начальной цепочки (аксиомы системы). Если же некоторые подстановки системы меняют свою длину, то такие системы будем называть М-системами с *переменной длиной*. Рассмотрим сначала поведение массовых систем с постоянной длиной.

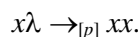
Можно показать, что изменение концентраций символов в массовых системах с постоянной длиной подчиняется дифференциальным уравнениям специального вида. Рассмотрим, как строится такое дифференциальное уравнение на примере простой системы с одной подстановкой (не считая, естественно, перемешивающей подсистемы, которую мы для краткости не будем указывать): $a_1 a_2 \dots a_m \rightarrow_{[p]} b_1 b_2 \dots b_m$. Скорость изменения концентрации любого символа x , определяемая такой подстановкой, оказывается пропорциональной произведению концентраций всех символов, стоящих в левой части подстановки, и выражается следующим дифференциальным уравнением

$$dx/dt = k \cdot a_1 a_2 \dots a_m. \quad (1)$$

Коэффициент k в этой формуле равен произведению

$$k = (r - l) (1 - \omega)^2 \omega^{m-1} p,$$

параметры r и l обозначают *количество* символов x в правой и левой частях данной подстановки. В химической кинетике уравнения вида (1) называются *законом действующих масс* [6]. В качестве примера рассмотрим простую модель роста, описываемую подстановкой вида



Скорость изменения концентрации символа x описывается уравнением:

$$dx/dt = kx\lambda,$$

скорость изменения концентрации символа λ – уравнением

$$d\lambda/dt = -kx\lambda.$$

Коэффициент пропорциональности определяется формулой $k = (1 - \omega)^2 \omega p$. Если начальная цепочка содержит только символы x и λ , то $x + \lambda = 1$. Это соотношение представляет собой первый интеграл полученной динамической системы, что позволяет отказаться от одного уравнения (например, от второго) и заменить в первом λ на $(1 - x)$. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее зависимость концентрации x от времени:

$$dx/dt = kx(1 - x). \quad (2)$$

На рисунке 4 приведено несколько примеров эволюции такой системы для различных значений начальной концентрации x_0 . Сплошными линиями показаны результаты моделирования системы, пунктирными – интегральные кривые дифференциального уравнения (2). Параметры расчетов: $N = 200$ (длина цепочки), $p = 0.0008$.

В том случае, если в системе имеется несколько подстановок, то при составлении кинетических уравнений надо учитывать вклад каждой из подстановок, просуммировав в правой части дифференциального уравнения соответствующие произведения концентраций. Для примера рассмотрим систему, в которой два символа (реагента) превращаются друг в друга с некоторыми заданными вероятностями p и q .



Дифференциальное уравнение, описывающее зависимость $x(t)$, записывается следующим образом (с учетом соотношения $x + \lambda = 1$):

$$dx/dt = -ax + b\lambda = -ax + b(1 - x) = b - (a + b)x, \text{ где } a = (1 - \omega)^2 p, b = (1 - \omega)^2 q. \quad (4)$$

Данное уравнение имеет единственную устойчивую точку покоя $x_0 = q/(p + q)$, соответствующую состоянию динамического равновесия системы.

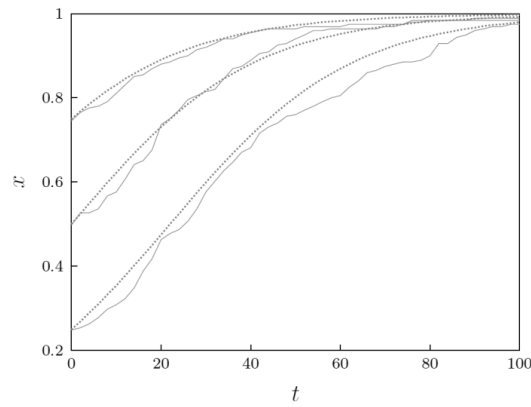


Рис. 4. Зависимость концентрации x от времени для модели роста

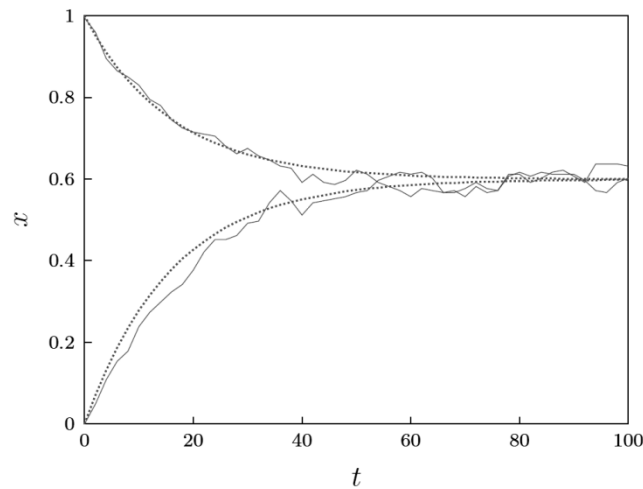


Рис. 5. Зависимость концентрации x от времени для модели (3)

На рисунке 5 приведены примеры эволюции системы (3) с параметрами $p = 0.002$ и $q = 0.003$ (что дает нам $x_0 = 0.6$) для двух начальных состояний $x = 0$ и $x = 1$. Сплошными линиями показаны результаты численного моделирования системы (3), пунктирными – аналитические решения уравнения (4).

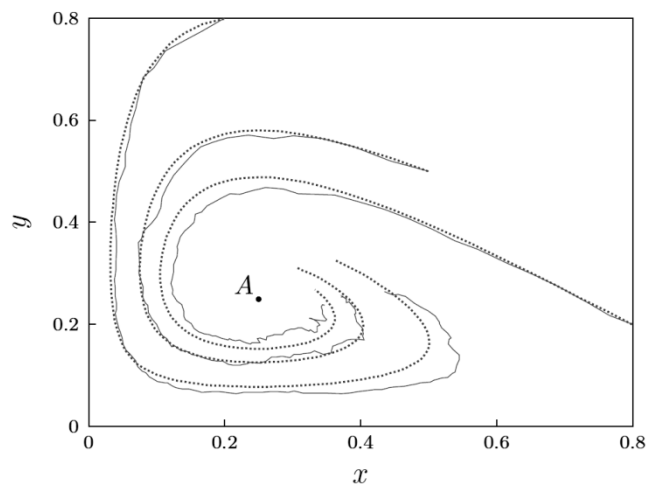


Рис. 6. Фазовый портрет системы «хищник-жертва» (5)

В качестве примера М-системы с более чем двумя символами, рассмотрим простую модель типа «хищник–жертва», в которой жертвы представлены символами x , хищники – символами y :

$$\lambda x \rightarrow_{[p]} xx, xy \rightarrow_{[q]} yy, y \rightarrow_{[r]} \lambda. \tag{5}$$

С учетом того, что сумма концентраций всех трех символов равна 1, можно сразу положить, что $x + y + \lambda = 1$. Тогда система кинетических уравнений для данной модели будет выглядеть следующим образом:

$$dx/dt = a(1 - x - y)x - bxy, \quad dy/dt = bxy - cy. \tag{6}$$

Ее коэффициенты равны $a = (1 - \omega)^2 \omega p$, $b = (1 - \omega)^2 \omega q$, $c = (1 - \omega)^2 r$. На рисунке 6 представлен пример численного расчета для данной модели ($n = 2000$, $p = 10^{-2}$, $q = 2 \cdot 10^{-2}$, $r = 2.5 \cdot 10^{-3}$). Сплошными линиями показаны результаты численного моделирования М-системы для трех различных начальных состояний системы, пунктирными – решения (численные) системы уравнений (6). Заметим, что единственная устойчивая точка покоя А данной системы при указанных параметрах имеет координаты $A = (0.25, 0.25)$.

3. Массовые системы с переменной длиной

Рассмотрим массовую систему с одной подстановкой вида $a_1 a_2 \dots a_n \rightarrow_{[p]} b_1 b_2 \dots b_m$. Пусть коэффициент $k = (1 - \omega)^2 \omega^{n-1} p$. Обозначим через l и r количество символов x в левой и правой частях данной подстановки. Можно показать, что концентрация символов x меняется со временем согласно следующему дифференциальному уравнению:

$$dx/dt = k(r - l) + (n - m)x \cdot a_1 a_2 \dots a_n. \tag{7}$$

Первое слагаемое в скобках отражает *явное* изменение концентрации, за счет увеличения или уменьшения количества символов x . Второе слагаемое $(n - m)x$ отражает *неявное* изменение концентрации, обусловленное изменением длины цепочки. Сама длина N цепочки со временем изменяется согласно следующему уравнению:

$$dN/dt = k \cdot (n - m) \cdot a_1 a_2 \dots a_n \cdot N. \tag{8}$$

Заметим, что в случае $n = m$ уравнение для x сводится к рассмотренному выше случаю М-систем с постоянной длиной, а уравнение для N вырождается в тривиальное уравнение $dN/dt = 0$, что означает фиксированную длину цепочки.

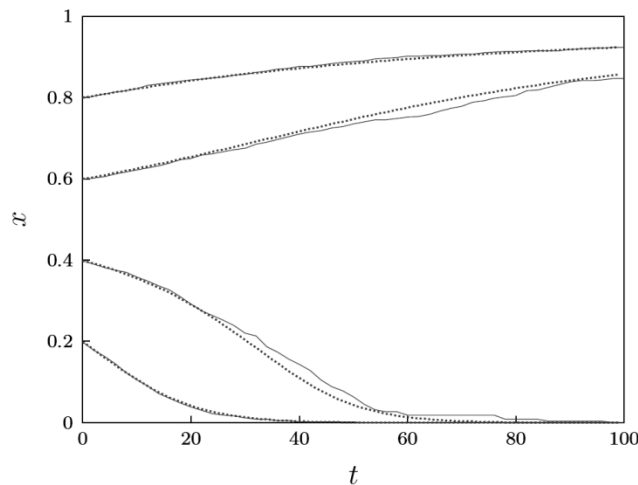


Рис. 7. Зависимость концентрации x от времени для подстановки $x\lambda\lambda \rightarrow_{[p]} \lambda$

В качестве примера рассмотрим систему с одной подстановкой вида $x\lambda\lambda \rightarrow_{[p]} \lambda$. Согласно описанным правилам, дифференциальные уравнения для концентрации символов x и длины цепочки N запишутся следующим образом (с учетом равенства $x + \lambda = 1$):

$$dx/dt = k(-1 + 2x)x(1 - x)^2, \quad dN/dt = -2kx(1 - x)^2 N, \tag{9}$$

где коэффициент пропорциональности $k = (1 - \omega)^2 \omega^2 p$. Заметим, что уравнение для x (в которое не входит длина N) имеет три точки покоя $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ и $x_3 = 1$, из которых x_2 является неустойчивой, а остальные две точки – устойчивыми. На рисунках 7 и 8 показаны результаты моделирования

такой системы (сплошные линии) и их сравнение с численным решением уравнений (9) (пунктирные линии) для различных начальных значений концентрации символов x .

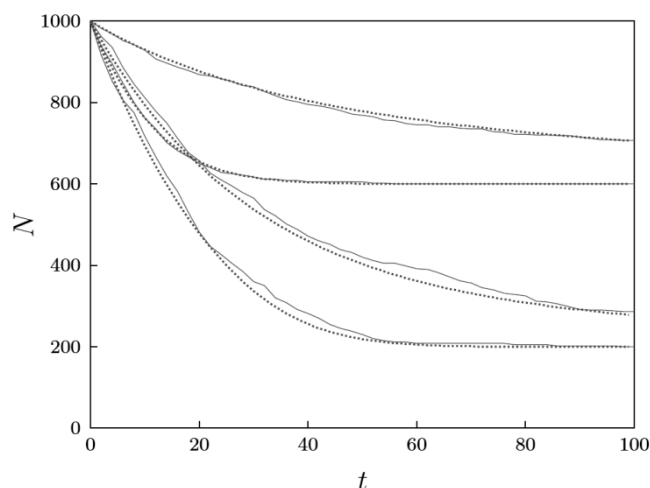


Рис. 8. Зависимость длины цепочки N от времени для подстановки $x\lambda\lambda \rightarrow_{[p]} \lambda$

Если алфавит массовой M -системы с переменной длиной состоит из единственного символа (например, x), то его концентрация, очевидно, всегда будет равна 1. Изменяться может только длина цепочки N . Для примера рассмотрим следующую простую систему (перемешивающей подсистемы в данном случае вообще нет, так как символ в системе всего один): $xx \rightarrow_{[p]} x$. Уравнение для длины N в этом случае имеет следующий вид:

$$dN/dt = -kx^2N, \text{ где } k = (1 - \omega)^2\omega p. \tag{10}$$

Т.к. $x \equiv 1$, то это уравнение принимает более простой вид $dN/dt = -kN$, и его решение оказывается равным $N(t) = N_0e^{-kt}$. На рисунке 9 построена зависимость $N(t)$ для данной системы для нескольких значений начальной длины N_0 . Сплошными линиями показаны результаты моделирования, пунктиром – найденная теоретическая зависимость.

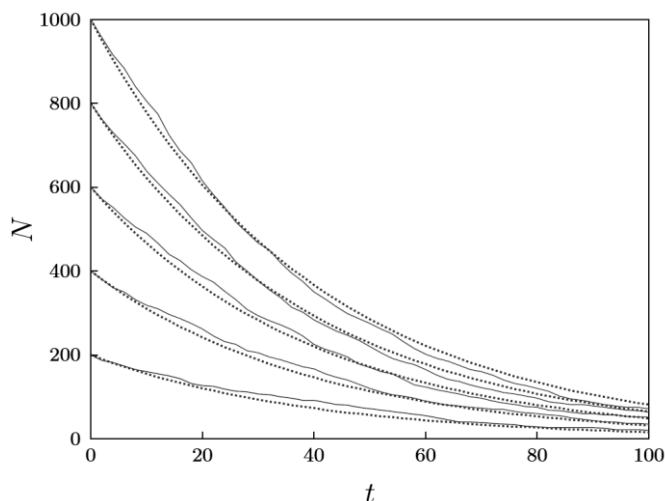


Рис. 9. Зависимость длины цепочки N от времени для подстановки $xx \rightarrow_{[p]} x$

В том случае, если в системе имеется несколько подстановок, то при составлении кинетических уравнений, как и в случае систем с фиксированной длиной, надо учитывать вклад каждой из подстановок, просуммировав в правой части дифференциального уравнения соответствующие произведения концентраций. Для примера рассмотрим простую систему, в которой два символа (реагента) превращаются друг в друга по следующим правилам:

$$x \rightarrow_{[p]} \lambda\lambda, \lambda\lambda\lambda \rightarrow_{[q]} x. \tag{11}$$

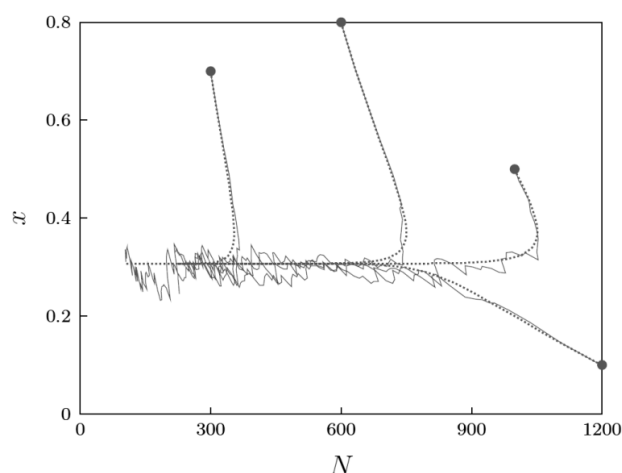


Рис. 10. Фазовые траектории систем (11) и (12)

Дифференциальные уравнения, описывающие зависимости $x(t)$ и $N(t)$ (при условии отсутствия в системе других символов), записываются в данном случае следующим образом:

$$dx/dt = a(-1 - x) + b(1 + 2x)(1 - x)^3, \quad dN/dt = (ax - 2b(1 - x)^3)N, \quad (12)$$

где $a = (1 - \omega)^2 p$, $b = (1 - \omega)^2 \omega^2 q$. На рисунке 10 показано поведение системы (11) для нескольких начальных значений концентрации символов x и длины цепочки N . Сплошными линиями на рисунке отражены фазовые траектории $x(N)$, полученные моделированием системы (11), пунктирными линиями – теоретические кривые, полученные численным решением дифференциальных уравнений (12). Маркерами отмечены начальные положения траекторий.

Выводы

В результате выполненной работы были получены следующие результаты:

- введено в рассмотрение понятие марковских систем с фиксированной и переменной длиной;
- показано, что поведение марковской системы, при наличии перемешивающей подсистемы подстановок, может быть описано системой автономных дифференциальных уравнений;
- рассмотрено несколько примеров массовых М-систем с фиксированной и переменной длиной (в том числе, модель типа «хищник-жертва»),
- приведены результаты численного сравнения результатов компьютерного моделирования марковских систем, находящиеся в хорошем согласии с результатами аналитического (или численного) решения соответствующих систем дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Tommaso Toffoli and Norman Margolus. Cellular automata machines: a new environment for modeling. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987.
2. Przemyslaw Prusinkiewicz and Aristid Lindenmayer. The algorithmic beauty of plants. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1996.
3. Gheorghe Paun, Grzegorz Rozenberg, and Arto Salomaa. The Oxford Handbook of Membrane Computing. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 201099.
4. Peter Dittrich, Jens Ziegler, and Wolfgang Banzhaf. Artificial chemistries – a review. *Artif. Life*, 7(3):225–275, June 2001.
5. Ершов Н. М. Реализация параллельного двоичного сумматора с помощью марковских систем // Программные системы и инструменты. Тематический сборник / Под ред. Л. С. Корухова, А. Н. Терехин. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2014. — Т. 15. — С. 37-43.
6. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987.