

## ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Бугров Алексей Николаевич**

*Кандидат физико-математических наук, доцент;  
ГБОУ ВО МО «Университет «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: bugrov2004@mail.ru.*

*В статье рассматривается вопрос об организации параллельных (одновременных) вычислений при решении двухточечных и трехточечных разностных уравнений. Используется параметрический подход распараллеливания расчетов, который был впервые предложен в 1978 году и в среде вычислителей известен под названием «прогонка Яненко». Указанный подход применяется для распараллеливания вычислений по неявной схеме Ландау, Меймана и Халатникова как иллюстрация распараллеливания вычислений по схемам типа «бегущего счета». Для неявной схемы решается и вопрос о реализации граничных условий без дополнительного пересчета в граничных узлах области. Обсуждается вопрос о различных способах организации параллельных вычислений – распараллеливания по краевым условиям и распараллеливания по правой части.*

**Ключевые слова:** параллельные (одновременные) вычисления, минимизация времени выполнения алгоритма, параллельная прогонка Яненко, предрешение задачи, двухточечное разностное уравнение, схема «бегущего счета», распараллеливание по краевым условиям, распараллеливание по правой части.

## ORGANIZATION OF PARALLEL CALCULATIONS IN THE SOLUTION OF TWO-POINT AND THREE- POINT FINITE-DIFFERENCE EQUATIONS

**Bugrov Alexey**

*Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, associate professor;  
Dubna State University,  
Institute of the system analysis and management;  
141980 Moscow region, Dubna, Universitetskaya str., 19;  
e-mail: bugrov2004@mail.ru.*

*In article the question of the organization of parallel (simultaneous) calculations at the solution of the two-point and three-point differential equations is considered. Parametrical approach which was for the first time offered in 1978 is used and among calculators carries the name «Yanenko's sweep» the specified approach is applied to parallelization of calculations according to Landau, Meyman and Halatnikov's implicit scheme as an illustration of parallelization of calculations according to «schemes of the running account». For the implicit scheme also the issue of realization of boundary conditions without additional recalculation in boundary knots of area is resolved. The question of various ways of the organization of parallel calculations - parallelizations «on regional conditions» and parallelizations «by the right part» is discussed.*

**Keywords:** parallel (simultaneous) calculations, minimization of time of algorithm execution, parallel sweep of Yanenko, the decision of a task, the two-point differential equation, the scheme of «the running account», parallelization «on regional conditions», parallelization «by the right part».

### **Введение**

Появление параллельных вычислений приводит, во-первых, к необходимости их широкого освоения, во-вторых к пересмотру ряда базовых понятий вычислительной математики – например, понятия экономичности вычислительного алгоритма. Действительно, параллельные (одновременные) вычисления при их реализации переносят фокус внимания вычислителя с вопроса о минимизации

выполняемых арифметических действий на вопрос минимизации времени выполнения алгоритма. В случае выполнения вычислений на одноподобном процессоре решение этих вопросов эквивалентно, для многопроцессорного компьютера или многоподобного процессора компьютера – нет. Для многопроцессорной вычислительной установки или компьютерного кластера возникает дополнительная задача динамической настройки программы / алгоритма на конфигурацию параллельного вычислителя – количество процессоров, их производительность, латентность, пропускную способность коммуникационных каналов. Важен и выбор технологии реализации параллельного алгоритма – *MPI*, *Open MP* и др. В 1978 г. появилась статья [1], где поднимался вопрос об организации параллельных вычислений при реализации численных методов решения ряда задач математической физики. И до появления [1] вопрос об организации параллельных вычислений широко обсуждался в научной печати как прикладными математиками – вычислителями, так и разработчиками компьютерных систем. Однако в [1] рассматривался вопрос о распараллеливании строго последовательного алгоритма – метода прогонки – обращения трехдиагональной матрицы. На освоении и численной реализации этого последовательного алгоритма – метода прогонки выросло не одно поколение отечественных прикладных математиков – вычислителей. Отметим как важное обстоятельство и то, что предлагаемый способ распараллеливания не выводил в целом из класса используемых алгоритмов и описывался в терминах, хорошо знакомых прикладным математикам – вычислителям. В настоящее время реализация вычислений по [1] в среде вычислителей известна как «параллельная прогонка Яненко».

### Описание алгоритма распараллеливания решения трехточечного разностного уравнения

Приведем описание параллельной прогонки Яненко ввиду ограниченной доступности статьи [1] в настоящее время.

Основная идея параллельной прогонки Яненко состоит в выделении части искомым неизвестных в качестве параметрических (обозначаемых далее через  $\{\alpha_k\}$ ), построении системы уравнений относительно  $\{\alpha_k\}$ , называемой далее «модулем обмена», определении параметрических неизвестных  $\{\alpha_k\}$  и нахождении по ним остальных искомым неизвестных. При численной реализации такого подхода оказывается возможным организовать параллельные (одновременные) вычисления. Для построения модуля обмена необходимо найти зависимость искомым неизвестных от  $\{\alpha_k\}$ . Найденные зависимости будем называть «предрешением задачи», так как знание их явного вида и известные значения  $\{\alpha_k\}$  решают задачу обращения трехдиагональной матрицы. Узлы сетки, в которых значения искомым неизвестных принимаются за параметрические, будем называть далее «узлами распараллеливания».

Пусть отрезок  $(0,1)$  разбит  $M$  точками на  $M + 1$  подинтервал, а каждый подинтервал в свою очередь разбит на  $N + 1$  интервалов. На  $(0,1)$  требуется решить разностную краевую задачу:

$$Lu \equiv (au_x)_x - bu = f(x), u(0) = \mu_0, u(1) = \mu_1 \tag{1}$$

В качестве параметрических неизвестных  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, M$  возьмем значения искомой сеточной функции в  $M$  точках разбиения отрезка  $(0,1)$ , то есть примем эти точки за узлы распараллеливания. Для коэффициентов и правой части на  $k$ -ом интервале примем обозначения:

$$\begin{aligned} a_i^k &= a_{(k-1)n+i} \\ b_i^k &= b_{(k-1)n+i}, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{2}$$

Значение правой части  $f$  и коэффициента  $b$  в  $k$ -том узле распараллеливания обозначим через  $\Phi_k, b_k$ . Для построения модуля обмена запишем разностное уравнение в  $k$ -той точке распараллеливания

$$\frac{a_1^{k+1} \frac{u_1^{k+1} - \alpha_k}{h} - a_N^k \frac{\alpha_k - u_{N-1}^k}{h}}{h} - b_k \alpha_k = -\Phi_k, k = 1, \dots, M, \tag{3}$$

где  $u_1^{k+1}, u_{N-1}^k$  – значения искомой функции в узлах, соседних с  $k$ -тым узлом распараллеливания. Так как  $u_1^{k+1}, u_{N-1}^k$  зависят соответственно только от  $\alpha_k, \alpha_{k+1}$  и  $\alpha_{k-1}, \alpha_k$ , то матрица коэффициентов

системы линейных уравнений относительно  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, M$  будет также трехдиагональной. Найдем её явный вид. Для этого нам необходима параметрическая зависимость  $u_1^{k+1}, u_{N-1}^k$  от  $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ . В силу линейности исходной задачи искомое решение  $u$  на  $k$ -том подинтервале представимо в виде:

$$u_i = \alpha_{k-1}u_{10}^i + \alpha_k u_{01}^i + u_{00}^i, \tag{4}$$

где  $u_{10}^i, u_{01}^i, u_{00}^i$  – решение следующих краевых задач:

$$\Lambda^k u = 0, u^0 = 1, u^N = 0, \tag{5}$$

$$\Lambda^k u = 0, u^0 = 0, u^N = 1, \tag{6}$$

$$\Lambda^k u = f, u^0 = 0, u^N = 0 \tag{7}$$

соответственно. В (5), (6), (7) разностный оператор определяется разностным уравнением, рассматриваемым во внутренних точках  $k$ -го подинтервала распараллеливания. Задачи (5), (6), (7) могут решаться независимо друг от друга и запоминаться в памяти компьютера. Теперь по (4) находим:

$$u_1^{k+1} = \alpha_k (u_{10}^{k+1})_1 + \alpha_{k+1} (u_{01}^{k+1})_1 + (u_{00}^{k+1})_1, \tag{8}$$

$$u_{N-1}^k = \alpha_{k-1} (u_{10}^k)_{N-1} + \alpha_k (u_{01}^k)_{N-1} + (u_{00}^k)_{N-1} \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в (3) приходим к системе уравнений для определения параметрических неизвестных  $\{\alpha_k\}$ :

$$\frac{a_1^{k+1} (u_{01}^{k+1})_1 \alpha_{k+1} - [(1 - (u_{10}^{k+1})_1) a_1^{k+1} + (1 - (u_{01}^k)_{N-1}) a_N^k] \alpha_k + a_N^k (u_{10}^k)_{N-1} \alpha_{k-1}}{h^2} - b_k \alpha_k = - \frac{a_1^{k+1} (u_{00}^{k+1})_1 - a_N^k (u_{00}^k)_{N-1}}{h^2} - \Phi_k, k = 1, \dots, M. \tag{10}$$

К (10) нужно присоединить краевые условия для  $\{\alpha_k\}$ :

$$\alpha_0 = \mu_0, \alpha_{M+1} = \mu_1 \tag{11}$$

вытекающие очевидным образом из (1). Определив прогонкой  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1 \dots M$  из (10) с краевыми условиями (11), найдем значения искомой функции  $u$  на всем интервале (0,1) с помощью представления (4). После нахождения  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, M$ , вычисление  $u$  на каждом подинтервале можно проводить независимо от остальных подинтервалов. Следовательно, параллельные (одновременные) вычисления можно выполнять на этапе предрешения задачи и этапе расчета искомого решения на каждом подинтервале.

Представляет интерес вопрос об устойчивости прогонки для определения  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, M$ . Этот вопрос был положительно решен в [2]. В работе была доказана устойчивость прогонки для определения  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, M$  как следствие устойчивости прогонки для исходной задачи.

Нетрудно видеть, что подход, предложенный в [1] допускает распространение и на ряд алгоритмов, «родственных» алгоритму обращения трехдиагональной матрицы – далее это было выполнено в [3].

Интересно отметить, что идея параллельной прогонки Яненко возникла в результате обсуждения покойным академиком Н.Н.Яненко с одним из соавторов работы [1] вопроса, касающегося использования для распараллеливания расчетов «точных» разностных схем Тихонова, Самарского [4], см. также [5]. Действительно, если бы разностная схема обладала бы свойством, таким, что решение на грубой сетке одновременно являлось бы решением и на мелкой сетке, то эта разностная схема идеально подходила бы для распараллеливания исходной задачи, хотя бы для одномерного случая. Именно таким свойством обладает модуль обмена – разностная схема для параметрических неизвестных  $\{\alpha_k\}$  относительно исходной задачи, инкапсулируя информацию о мелкой сетке во вспомогательных решениях  $u_{00}, u_{10}, u_{01}$ .

## Описание алгоритма распараллеливания решения двухточечного разностного уравнения

При численном решении ряда задач математической физики, а именно для гиперболических уравнений, широко используются разностные схемы, приводящие, в конечном счете, к реализации последовательных вычислений для двухточечного разностного уравнения. Представляет, на наш взгляд, рассмотреть возможность реализации параллельных вычислений и в этом случае. Рассмотрим двухточечное скалярное разностное уравнение:

$$\begin{aligned} p_{j+1}x_{j+1} - q_jx_j &= f_{j+1}, 0 \leq j \leq L-1, \\ p_0x_0 &= f_0, \end{aligned} \tag{12}$$

решение которого может быть вычислено рекуррентно по формулам:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_0 / p_0 \\ x_{j+1} &= q_jx_j / p_{j+1} + f_{j+1} / p_{j+1}, 0 \leq j \leq L-1 \end{aligned} \tag{13}$$

Будем считать, что формулы (13) реализуют устойчивые вычисления, то есть относительно  $q_j / p_{j+1}, 0 \leq j \leq L-1$  потребуем, чтобы абсолютные значения этих величин не превышали 1.

В соответствие с идеей параллельной прогонки Яненко разобьем интервал изменения индекса (0, L) M точками на M + 1 подинтервал, и будем считать, что каждый подинтервал в свою очередь разбит на N + 1 интервалов. Значения искомой функции  $x_k$  при  $k = N + 1, 2(N + 1), 3(N + 1), \dots$  примем за параметрические неизвестные и обозначим через  $x[k]$ . Глобальный индекс j узла сетки свяжем с его локальным индексом i на k- подинтервале распараллеливания по формуле:  $j = i + (k - 1)n$ .

При этом сеточную функцию g будем индексировать двумя способами: с помощью глобального индекса j и локального индекса i на k-подинтервале распараллеливания, тогда:  $g_j = g_i[k]$ .

Целесообразность подобной индексации, в отличие от (2), определяется тем, что далее мы будем вынуждены ввести еще и индекс, соответствующий слою разностной схемы по времени.

На подинтервале  $[k(N + 1), (k + 1)(N + 1)]$  решим следующие вспомогательные задачи (предрешение задачи):

$$\begin{aligned} p_{i+1}[k]u^{(0)}_{i+1}[k] - q_i[k]u^{(0)}_i[k] &= f_{i+1}[k], i = 0, 1, \dots \\ p_0[k]u^{(0)}_0[k] &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} p_{i+1}[k]u^{(1)}_{i+1}[k] - q_i[k]u^{(1)}_i[k] &= 0, i = 0, 1, \dots \\ p_0[k]u^{(1)}_0[k] &= 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Индекс k в квадратных скобках означает соответствующий подинтервал распараллеливания и изменяется от 1 до M + 1. Тогда в силу линейности задачи на каждом подинтервале:

$$[k(N + 1), (k + 1)(N + 1)]$$

имеем представление, эквивалентное (4):

$$x_i[k] = u_i^{(1)}[k]x_{k(n+1)} + u_i^{(0)}[k], i = 0, 1, \dots \tag{16}$$

Подставляя это выражение при  $i = k(n + 1) - 1$  в разностное уравнение, записанное для узла распараллеливания k, получаем разностное уравнение модуля обмена:

$$p_{km}x_{km} - q_{km-1}u_{n-1}^{(1)}[k-1]x_{km-1} = f_{km} + q_{km-1}u_{n-1}^{(0)}[k-1], k = 1, \dots, m, \tag{17}$$

решение которого, вместе с формулами (16) и предрешением задачи (14), (15), определяет иско-  
мое решение задачи (12).

Устойчивость вычислений по (17) устанавливается непосредственно. Нетрудно видеть, что:

$$u^{(1)}_i[k] = \prod_{l=1}^{i-1} q_l[k] / p_{l+1}[k] \text{ и в силу устойчивости численного алгоритма для исходной задачи}$$

алгоритм реализации модуля обмена тоже устойчив. Указанный подход применим и к разностным  
уравнениям выше второго порядка с граничными условиями Коши.

### Описание алгоритма распараллеливания вычислений по схеме бегущего счета

Для иллюстрации применения этого подхода для распараллеливания вычислений по схемам типа  
«бегущего счета» рассмотрим смешанную задачу Коши для простейшего гиперболического уравне-  
ния в предположении положительности коэффициента  $a$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), u(0,t) = g(t), u(x,0) = r(x) \text{ при } 0 \leq x \leq Lh, 0 \leq t \leq T \quad (18)$$

Для решения смешанной задачи Коши применим неявную разностную схему:

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + a_j^m \frac{u_j^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{h} = F_j^m, u_0^m = g^m, u_j^0 = r_j. \quad (19)$$

Реализация неявной разностной схемы приводит к двухточечному разностному уравнению

$$u_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} u_{j-1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} u_j^m + \frac{\tau}{1 + \kappa_j^m} F_j^m \quad (20)$$

При соответствующих начальных и краевых условиях. Иллюстрацию подхода проведем для слу-  
чая разбиения  $[0, L]$  на два подинтервала  $[0, L/2]$  и  $[L/2, L]$ , на которых выполним предрешение  
задачи в виде решения следующих двухточечных разностных уравнений сеточных задач при перехо-  
де с одного временного слоя  $m$  на следующий  $m + 1$ :

$$w_i^{(0)}[k] = \frac{\kappa_i^m}{1 + \kappa_i^m} w_{i-1}^{(0)}[k] + \frac{1}{1 + \kappa_i^m} u_i^m + \frac{\tau}{1 + \kappa_i^m} F_i^m, w_0^{(0)} = 0, i = 1, \dots, L/2 \quad (21)$$

$$w_i^{(1)}[k] = \frac{\kappa_i^m}{1 + \kappa_i^m} w_{i-1}^{(1)}[k], w_0^{(1)}[k] = 1, i = 1, \dots, L/2 \quad (22)$$

Значение индекса  $k = 1$ , соответствует первому подинтервалу,  $k = 2$  – второму, под индексом  $i$   
следует понимать локальный индекс соответствующего подинтервала, связанный с глобальным  
номером  $j$  узла сетки по формуле:

$$j = i + L/2 \cdot (k - 1), k = 1, 2. \quad (23)$$

В качестве параметрических неизвестных выберем значения искомой функции в узлах сетки  
 $j = L/2$  и  $j = L$  в момент времени  $m + 1$ . Нетрудно видеть, что модуль обмена для определения пара-  
метрических неизвестных  $\{\alpha_j\}$ , при  $j = 1$  соответствующему узлу сетки  $L/2$  и  $j = 2$  соответствующе-  
му узлу сетки  $L$  имеет вид:

$$\alpha_1 = \frac{\kappa_{L/2}^m}{1 + \kappa_{L/2}^m} w_{L/2-1}^{(1)}[1] g^{m+1} + \frac{\kappa_{L/2}^m}{1 + \kappa_{L/2}^m} w_{L/2-1}^{(0)}[1] + \frac{1}{1 + \kappa_{L/2}^m} u_{L/2}^m + \frac{\tau}{1 + \kappa_{L/2}^m} F_{L/2}^m, \quad (24)$$

$$\alpha_2 = \frac{\kappa_L^m}{1 + \kappa_L^m} w_{L/2-1}^{(1)}[2] \alpha_1 + \frac{\kappa_L^m}{1 + \kappa_L^m} w_{L/2-1}^{(0)}[2] + \frac{1}{1 + \kappa_L^m} u_L^m + \frac{\tau}{1 + \kappa_L^m} F_L^m. \quad (25)$$

Заметим, что при небольшом количестве точек распараллеливания модуль обмена может быть реализован аналитически, не прибегая к «услугам» компьютера. Эта особенность может представлять определенный интерес в случае реализации алгоритма распараллеливания на многоядерных процессорах с небольшим количеством ядер.

Следующее замечание касается другого крайнего случая – когда точек распараллеливания достаточно много, а узлов, в которых осуществляется предрешение задачи мало. Тогда параллельная прогонка Яненко может выступать как эффективный способ редукции неизвестных. Эта возможность обсуждалась нами в [6].

Применим этот подход для распараллеливания вычислений по неявной схеме Л.Д.Ландау, Н.Н. Меймана, И.М.Халатникова как иллюстрации распараллеливания вычислений по схемам типа «бегущего счета». Описание схемы и алгоритма расчета приводится по [7]. Для уравнений изоэнтропического течения:

$$\frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = F_1, \tag{26}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = F_2 \tag{27}$$

поставим смешанную задачу Коши:

$$u = \frac{r+s}{2} = f(t), q=0, r-s = g(t), q = q_0 \tag{28}$$

$$r(q,0) = r_0(q), s(q,0) = s_0, 0 \leq q \leq q_0.$$

Простейшая неявная схема решения задачи имеет вид:

$$\frac{s_j^{m+1} - s_j^m}{\tau} - a_j^m \frac{s_{j+1}^{m+1} - s_j^{m+1}}{h} = F_{1j}^m \tag{29}$$

$$\frac{r_j^{m+1} - r_j^m}{\tau} + a_j^m \frac{r_j^{m+1} - r_{i-1}^{m+1}}{h} = F_{2j}^m$$

$$r_0^m + s_0^m = 2f^m$$

$$r_{N+1}^m - s_{N+1}^m = g^m \tag{30}$$

$$r_j^0 = r_{0j}, s_j^0 = s_{0j}, (N+1)h = q_0$$

Формулы позволяют устойчиво считать  $r$  слева направо, пробегая последовательно индексы  $j = 1, 2, N + 1$ . Аналогично устойчивые вычисления  $s$  реализуются справа налево в порядке убывания индекса  $j$ . В [7] дается следующее описание реализации алгоритма расчета. Краевые условия рассчитываются следующим образом. Величина  $s_0^{m+1}$  сначала определяется по формуле явного счета:

$$s_0^{m+1} = (1 - \kappa_0^m) s_0^m + \kappa_0^m s_1^m + F_{10}^m \tau \tag{31}$$

после чего  $r_0^{m+1}$  определяется с помощью (30). Из соотношений (29) рекуррентно – слева направо – определяются  $r_j^{m+1}$ . Из условия (30) определяется  $s_{N+1}^{m+1}$ , после чего из соотношений (29) рекуррентно – справа налево – определяются  $s_j^{m+1}$ . Пришедшее в левую границу значение  $s_0^{m+1}$  не совпадает со значением, полученным из (30); поэтому необходимо уточнить значение  $s_0^{m+1}$ . Так как формулы (29) определяют  $r_{N+1}^{m+1}$  как линейную функцию от  $r_0^{m+1}$ , а  $s_0^{m+1}$  – как линейную функцию от  $s_{N+1}^{m+1}$ , то достаточно сделать один пересчет с последующей линейной интерполяцией.

Предположим, что узлы сетки, введенной на отрезке  $(0, q_0)$  изменения пространственной переменной для  $s$  и  $r$  структурированы в соответствии с идеей распараллеливания по Яненко, то есть они разбиты точками распараллеливания на  $m + 1$  подинтервал, а каждый подинтервал в свою очередь

разбит на  $n + 1$  узлов. Примем обозначения  $N = (n + 1) \cdot (m + 1)$ ,  $q_0 = h \cdot (N + 1)$ . Переход со слоя по времени с номером  $m$  осуществляется по известным значениям  $r^m$  и  $s^m$  путем расчета значений  $s^{m+1}$ ,  $r^{m+1}$  по двухточечным разностным уравнениям:

$$s_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} s_{j+1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} (\tau F_{1j}^m + s_j^m), j = N, N - 1, \dots, 0, \quad (32)$$

$$r_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} r_{j-1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} (\tau F_{2j}^m + r_j^m), j = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (33)$$

Продемонстрируем предрешение задачи для конкретизации перехода с временного слоя  $m$  на слой  $m + 1$ . Пусть  $s^{(0)}$ ,  $s^{(1)}$ ,  $r^{(0)}$ ,  $r^{(1)}$  решения следующих задач:

$$s^{(0)} : s_N = 0, s_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} s_{j+1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} (\tau F_{1j}^m + s_j^m), j = N, N - 1, \dots, 0, \quad (34)$$

$$s^{(1)} : s_N = 1, s_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} s_{j+1}^{m+1}, j = N, N - 1, \dots, 0, \quad (35)$$

$$r^{(0)} : r^{(0)}_0 = 0, r_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} r_{j-1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} (\tau F_{2j}^m + r_j^m), j = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (36)$$

$$r^{(1)} : r^{(1)}_0 = 0, r_j^{m+1} = \frac{\kappa_j^m}{1 + \kappa_j^m} r_{j-1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_j^m} (\tau F_{2j}^m + r_j^m), j = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (37)$$

Определение этих искомым функций с конкретными граничными условиями на  $m + 1$  слое будем называть предрешением задачи. В силу линейности задачи определения искомым функций на  $m + 1$  слое по времени имеет место представление:

$$s_j^{m+1} = s_j^{(0)} + s_N^{(m+1)} s_j^{(1)}, j = N, \dots, 0, \quad (38)$$

$$r_j^{m+1} = r_j^{(0)} + r_0^{(m+1)} r_j^{(1)}, j = 0, \dots, N + 1. \quad (39)$$

С помощью которого можно конкретизировать расчет по неявной схеме Л.Д.Ландау, Н.Н.Меймана, И.М.Халатникова по части вычисления граничных условий на  $m + 1$  слое по времени. Действительно, подставляя представление решения через предрешение задачи в граничные условия:

$$r_0^{m+1} + s_0^{m+1} = 2f^{m+1},$$

$$r_{N+1}^{m+1} - s_{N+1}^{m+1} = g^{m+1}$$

получаем:

$$s_{N+1}^{m+1} = \frac{r_{N+1}^{(0)} - r_{N+1}^{(0)} s_0^{(0)} + 2f^{m+1} r_{N+1}^{(1)} - g^{m+1}}{1 + s_0^{(1)} r_{N+1}^{(1)}}, \quad (40)$$

$$r_0^{m+1} = \frac{2f^{m+1} + g^{m+1} s_0^{(1)} - s_0^{(0)} - s_0^{(1)} r_{N+1}^{(0)}}{1 + s_0^{(1)} r_{N+1}^{(1)}}. \quad (41)$$

Далее реализацию граничных условий будем осуществлять именно таким образом с помощью предрешения задачи и на вопросе вычисления граничных условий останавливаться больше не будем.

На каждом подинтервале распараллеливания «предрешим» задачу на  $m + 1$  слое в виде:

$$s^{(0)} : s^{(0)}_N[k] = 0, s_i^{(0)m+1}[k] = \frac{\kappa_i^m[k]}{1 + \kappa_i^m[k]} s_{i+1}^{(0)m+1}[k] + \frac{1}{1 + \kappa_i^m[k]} (\tau F_{1i}^m[k] + s_i^m[k]), i = N, N - 1, \dots, 0,$$

$$s^{(1)} : s^{(1)}_N[k] = 1, s^{(1)m+1}_i[k] = \frac{\kappa_i^m}{1 + \kappa_i^m} s^{(1)m+1}_{i+1}[k], i = N, N-1, \dots, 0,$$

$$r^{(0)} : r^{(0)}_0[k] = 0, r^{(0)m+1}_i[k] = \frac{\kappa_i^m[k]}{1 + \kappa_i^m[k]} r^{(0)m+1}_{i-1}[k] + \frac{1}{1 + \kappa_i^m[k]} (\tau F_{2i}^m[k] + r_i^m[k]), i = 1, 2, \dots, N+1,$$

$$r^{(1)} : r^{(1)}_0[k] = 1, r^{(1)m+1}_i[k] = \frac{\kappa_i^m[k]}{1 + \kappa_i^m[k]} r^{(1)m+1}_{i-1}[k] + \frac{1}{1 + \kappa_i^m[k]} (\tau F_{2i}^m[k] + r_i^m[k]), i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Знание величин:

$$s^{(0)}_0[1], s^{(1)}_0[1], s^{(0)}_N[M+1], s^{(1)}_N[M+1] \text{ и } r^{(0)}_0[1], r^{(1)}_0[1], r^{(0)}_N[M+1], r^{(1)}_N[M+1]$$

совместно с краевыми условиями позволяет найти значения  $s_0^{m+1}, s_L^{m+1}, r_0^{m+1}, r_L^{m+1}$  по (40), (41).

Пусть  $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$  – значения искоемых функций  $s, r$  в узлах распараллеливания, тогда нетрудно видеть, что для них в узлах распараллеливания имеют место двухточечные разностные уравнения, которые в соответствии с принятой терминологией формируют модуль обмена:

$$\alpha_k^{m+1} = \frac{\kappa_0^m[k]}{1 + \kappa_0^m[k]} s^{(1)}_0[k] \alpha_{k+1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_0^m[k]} (\kappa_0^m[k] s^{(0)}_0[k] + \tau F_{1,0}^m[k] + \alpha_0^m[k]), \quad (42)$$

$$\beta_k^{m+1} = \frac{\kappa_0^m[k]}{1 + \kappa_0^m[k]} r^{(1)}_0[k-1] \beta_{k-1}^{m+1} + \frac{1}{1 + \kappa_0^m[k]} (\kappa_0^m[k] r^{(0)}_N[k-1] + \tau F_{2,0}^m[k] + \beta_N^m[k]). \quad (43)$$

Параллельный (одновременный) расчет теперь организовывается аналогичным способом, что и для параллельной прогонки Н.Н.Яненко.

Нетрудно видеть, что четно-нечетная редукция и редукция произвольного числа неизвестных организовывается и в этом случае очевидным образом.

Несколько иной способ распараллеливания, чем тот, который реализован в параллельной прогонке Яненко, может быть использован для решения СЛАУ с нижней (верхней) треугольной матрицей. В качестве исходной рассмотрим задачу определения решения СЛАУ с нижней треугольной матрицей:

$$Ax = F, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (44)$$

В силу линейности  $(n + 1)$  искоемое решение может быть представлено в виде:

$$x = f_1 x^{(1,0,\dots,0)} + f_2 x^{(0,1,\dots,0)} + \dots + f_n x^{(0,\dots,0,1)}, \quad (45)$$

где  $x^{(1,0,\dots,0)}, x^{(0,1,\dots,0)}, \dots, x^{(0,\dots,0,1)}$  – вспомогательного решения  $(n + 1)$  при правых частях специального вида – все компоненты этих правых частей равны нулю, за исключением одной, равной 1. Предрешением исходной задачи  $(n + 1)$  будем называть вычисление такого множества вспомогательного решений  $x^{(1,0,\dots,0)}, x^{(0,1,\dots,0)}, \dots, x^{(0,\dots,0,1)}$ . Нетрудно видеть, что первые  $k - 1$  компонент соответствующего вспомогательного решения равны нулю. Например, только компонента под номером  $n$  вспомогательного решения  $x^{(0,\dots,0,1)}$  равна  $a_{nn}^{-1}$ , где  $a_{ij}$  – коэффициенты матрицы  $A$ .

Разобьем искоемые неизвестные и правую часть  $f$  на последовательные группы:

$$\{x_1, \dots, x_m\}, \{x_{m+1}, \dots, x_{2m}\}, \dots, \{x_l, \dots, x_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}, \{f_{m+1}, \dots, f_{2m}\}, \dots, \{f_l, \dots, f_n\}.$$



Эти группы искомых неизвестных и компонент правой части обозначим как  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  и  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ . Для простоты изложения ограничимся одинаковым числом неизвестных в каждой группе, хотя выбор числа неизвестных в группах представляет важную задачу с точки зрения балансировки загрузки процессоров. Исходная СЛАУ может быть переформулирована в терминах  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  и  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$  как:

$$\begin{aligned} A_{11}x^{(1)} &= f^{(1)}, \\ A_{22}x^{(2)} &= f^{(2)} - A_{21}x^{(1)}, \\ A_{33}x^{(3)} &= f^{(3)} - A_{31}x^{(1)} - A_{32}x^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ A_{ll}x^{(l)} &= f^{(l)} - A_{l1}x^{(1)} - \dots - A_{l,l-1}x^{(l-1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Матрицы  $A_{nm}$  определяются соответствующими строками и столбцами исходной матрицы коэффициентов СЛАУ соответствующими разбиением искомых неизвестных и правой части на группы  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  и  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ . Выполним предрешение задачи  $(n+3)$  понимая под правой частью  $k$  – задачи величину:

$$\Phi_k = f^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}x^{(i)}. \quad (47)$$

Предрешение задачи допускает параллельные (одновременные) вычисления. Далее вычисляем значения искомых неизвестных, входящих в первую группу  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , так как значение компонент, входящих в первую группу правых частей нам известны. После определения значений искомых неизвестных входящих в первую группу мы в состоянии вычислить величину  $\Phi_2$ , с помощью которой мы вычисляем вторую группу искомых неизвестных и т.д. Таким образом, предлагаемый параллельный алгоритм решения исходной задачи состоит из этапа предрешения задач, которые могут реализовываться параллельно, соответствующего вычисления правых частей  $\Phi_k$  и последовательного вычисления искомых неизвестных по группам. Следует отметить и возможность использования параллельных вычислений для определения  $\Phi_k$ .

Если параллельная прогонка Яненко организовывается путем декомпозиции исходного алгоритма по краевым условиям, то приведенный выше алгоритм организовывается путем декомпозиции вычислений по правым частям и, на наш взгляд, его естественно назвать «распараллеливанием по правой части» в отличие от «распараллеливания по краевым условиям», реализованным в параллельной прогонке Яненко.

## Заключение

Организация параллельных вычислений приводит, во-первых, к необходимости их широкого освоения, во-вторых к пересмотру ряда базовых понятий вычислительной математики – например понятия экономичности вычислительного алгоритма. В статье подход, называемый как «прогонка Яненко» в среде отечественных вычислителей-прикладных математиков, распространяется и на схемы типа «бегущего счета». Предлагается ввести понятия «распараллеливание по правой части» и «распараллеливание по краевым условиям».

## Список литературы

1. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и «распараллеливании» прогонки // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Б.и.,1978. – Т. 9. – №7. – С.139-146.
2. Бугров А.Н., Коновалов А.Н. Об устойчивости алгоритма распараллеливания прогонки // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Б.и.,1979. – Т. 10. – №6. – С.27-32.
3. Акимова Е.Н. Параллельные прямые методы решения разреженных линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995. – Вып. 1. – С. 47-60.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. 3 – е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1989. – С. 616.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1980. – С. 536.
6. Бугров А.Н. Редукция неизвестных при решении СЛАУ с трехдиагональными матрицами параллельной прогонкой Яненко //Тезисы докладов III школы – семинара «Численные методы для высокопроизводительных систем». – Фрунзе: Илим, 1988. – С. 10.
7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. Изд. 2 – е. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978, – С. 688.