

ЛОГИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ ПАРАДОКСЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ И МЯГКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ульянов Сергей Викторович¹, Андреев Евгений Игоревич²,
Афанасьева Ольга Александровна³, Барбашинов Максим Николаевич⁴,
Резникова Наталья Владимировна⁵, Самигулина Эльвира Афхадиевна⁶

¹ Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: uyanovsv@mail.ru.

² Студент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: dampiels@gmail.com.

³ Студент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: olyagulya87@mail.ru.

⁴ Студент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: comtek.f1@mail.ru.

⁵ Студент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: natalya-reznikova7@yandex.ru.

⁶ Студент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: migrock@mail.ru.

Рассмотрены основные фундаментальные принципы, квантовые логические парадоксы и физические эффекты квантовых и мягких вычислений, используемые в эффективном решении задач системного анализа и интеллектуального управления слабо формализованными системами. Приведенные методы эффективны при исследовании сложных (по Колмогорову) конечных объектов в решении алгоритмически неразрешимых классическими вычислениями задач теории управления.

Ключевые слова: квантовые мягкие вычисления, интеллектуальное управление, квантовые логические парадоксы.

**LOGICAL AND QUANTUM PARADOXES OF QUANTUM AND SOFT
COMPUTATIONAL INTELLIGENCE****Uljanov Sergej¹, Andreev Evgenij², Afanas'eva Ol'ga³, Barbashinov Maksim⁴,
Reznikova Natal'j⁵, Samigulina Jel'vira⁶**

¹ Doctor of Science Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

² Student;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: dampiels@gmail.com.

³ Student;
International university of the nature, society and man «Dubna»,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: olyagunya87@mail.ru.

⁴ Student;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: comtek.f1@mail.ru.

⁵ Student;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: natalya-reznikova7@yandex.ru.

⁶ Student;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: migrock@mail.ru.

Main fundamental principles, quantum logic paradoxes and physical effects of quantum and soft computing are discussed that for effective solutions of system analysis and intelligent control of ill-defined objects are used. Developed solutions are effective for algorithmic unsolved control problems in classical domain of complex finite objects (Kolmogorov's complexity of finite objects).

Keywords: quantum soft computing, intelligent control, quantum logic paradoxes.

Введение

При проектировании систем управления приходится учитывать не только известные в теории управления ограничения, но и новые физические явления и эффекты. Процесс формирования требуемых параметров наноструктур типа квантовых кораллов или точечных (игольчатых) структур осуществляется квантовым управлением самоорганизации за счет корреляционных взаимодействий и переноса информации на микро (нано) уровнях. Поэтому для практической реализации квантового подхода в процессе проектирования эффективных алгоритмов принятия решений и систем управления в условиях ограничений на количество доступной информации также требуется повышение соответ-

вующего уровня интеллектуальности [1 - 6], позволяющее включить в формируемые законы управления квантовые эффекты и явления. Оценка влияния квантовых эффектов на эффективное решение традиционных задач теории искусственного интеллекта, информатики, теории сложности алгоритмов, теории и систем управления и др. была дана в многочисленных исследованиях. В частности, к ним относятся теория игр, семантика и когнитивные процессы познания, лингвистические процессоры обработки естественного языка, интерпретации физических теорий и моделей измерений, обработки и распознавания изображений, теории вычислений и алгоритмов, робототехника и мехатроника, и мн. др. Результаты исследований показали [1, 7 - 12], что при использовании квантовых стратегий для обработки классической информации возникает существенная возможность извлечения скрытых в классических объектах управления (ОУ) дополнительных ресурсов и расширения их эффективного применения в процессах принятия оптимальных решений.

Трудности изучения студентами и применения квантовых вычислений специалистами в области теории и систем управления носят часто психологический характер ассоциативного (порой негативного) восприятия идей и принципов квантовой механики. Данные факты объясняются отсутствием в отечественной и зарубежной литературе проблемно-ориентированных методологических учебных пособий с конкретными наглядными инженерными приложениями, иллюстрирующими их практическую эффективность, например, для решения задач теории и систем управления [1].

В данной статье на конкретных примерах сделана попытка восполнить указанный пробел и разъяснить трудные вопросы интерпретации логических выводов квантовой механики явлений, используемых в квантовых операторах алгоритмов управления.

Пример 1: Квантовый бит как квантовое состояние

Классический бит может находиться в одном из двух состояний: 0 или 1. Таким образом, его физическое состояние можно представить как $b = a_1 0 + a_2 1$, которое имеет одну из форм: или $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$, тогда $b = 0$, или $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, и тогда $b = 1$. В противоположность состоянию квантового бита $|\psi\rangle$ задается вектором в двумерном комплексном векторном пространстве. Здесь вектор имеет две компоненты, и его проекции на базисы векторного пространства являются комплексными числами. Квантовый бит ψ представляется (в обозначениях Дирака в виде *кет*-вектора) как

$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ или в векторном обозначении $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, $\langle\psi| = [\alpha \ \beta]^T$ (*бра*-вектор). Если

$|\psi\rangle = |0\rangle$, то $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Амплитуды α и β – комплексные числа, для которых выполнено следующее условие: $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$, где «*» – операция комплексного сопряжения; $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ образует пару ортонормальных базисных векторов, называемых *состоянием вычислительного базиса*. Если α или β принимают нулевые значения, то ψ определяет классическое, чистое состояние. В противном случае говорят, что ψ находится в состоянии суперпозиции двух *классических* базисных состояний.

Геометрически квантовый бит находится в непрерывном состоянии между $|0\rangle$ и $|1\rangle$, пока не производятся измерения его состояния. Понятие амплитуды вероятностей квантового состояния является комбинацией концепции состояния и фазы. В случае, когда система состоит из двух квантовых битов, она описывается как тензорное произведение. Например, в обозначениях Дирака двухквантовая бит система задается, как

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle = \alpha\gamma |00\rangle + \alpha\delta |01\rangle + \beta\gamma |10\rangle + \beta\delta |11\rangle.$$

Число возможных состояний комбинированной системы возрастает экспоненциально при добавлении квантового бита. Это приводит к проблеме оценки квантовой корреляции, которая присутствует между квантовыми битами в составной системе (см., пример ниже).

Рассмотрим теперь пример классической логической операции, содержащей (или состоящей) из внутренних квантовых операций.

Пример 2: Корень квадратный из операции «отрицание» $\sqrt{\text{not}}$

Логическая операция «НЕТ», действуя на кубит $(|0\rangle, |1\rangle)$, является линейным оператором **not**: $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, который действует на все логические базисы следующим образом: $\text{not}|0\rangle = |1\rangle$, $\text{not}|1\rangle = |0\rangle$. Соответствующее матричное представление в логическом базисе имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и является матрицей Паули σ_x . Рассмотрим теперь нелинейную операцию $\sqrt{\text{not}}$ над

операцией **not**. Результат операции $\sqrt{\text{not}}$ является линейным оператором $\sqrt{\text{not}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, который, действуя на кубит над всеми логическими базисами, приводит к следующему результату:

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\text{not}}|0\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle; \quad \sqrt{\text{not}}|1\rangle = \frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle.$$

Физически данный результат означает, что измерение выходного результата $(|0\rangle, |1\rangle)$, если входом является сигнал $|0\rangle$, дает:

$$\begin{cases} |0\rangle \text{ с вероятностью } \frac{1}{2} \\ |1\rangle \text{ с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Аналогично для входа $|1\rangle$. Таким образом, оператор $\sqrt{\text{not}}$ является случайным переключателем. Интуитивно такой переключатель должен сохранять данное свойство, если его применить дважды. Однако это свойство не выполняется и применение дважды оператора $\sqrt{\text{not}} \sqrt{\text{not}} = \text{not}$, т.е., $\sqrt{\text{not}} \sqrt{\text{not}} |\psi\rangle = \text{not} |\psi\rangle$.

Объясняется данный «парадоксальный» факт тем, что в квантовой механике при оценке эволюции вероятности квантовых переходов осуществляется по законам сложения амплитуд вероятностей по всем возможным путям траекторий движения, а не самих вероятностей. Амплитуда вероятностей может быть уменьшена (деструктивная интерференция) или усилена (конструктивная интерференция) в процессе суммирования амплитуд вероятностей, что существенно отличает квантовые операции от классических вероятностных операций. Операцию $\sqrt{\text{not}}$ часто именуют как «возможное (tentative)» отрицание или «полу-отрицание (half-negation)»: применение дважды оператора $\sqrt{\text{not}}$ приводит к полному классическому логическому отрицанию **not**.

Отметим, что применение оператора $\sqrt{\text{not}}$ к $(|0\rangle, |1\rangle)$ приводит к формированию квантовой суперпозиции с комплексными амплитудами вероятности. Поэтому оператор $\sqrt{\text{not}}$ является сугубо квантовым оператором, не имеющим аналогов в классической и нечеткой логике.

Таким образом, операция классического логического отрицания состоит из двух внутренних квантовых операторов, реализующих конструктивную и деструктивную интерференцию амплитуд вероятностей.

Приведенный пример указывает на существование «скрытой» квантовой информации в классических состояниях, извлечение которой дает дополнительные возможности для формирования эффективных стратегий принятия решений на пространстве классических стратегий.

Пример 3: Квантовая корреляция и информационный «парадокс» квантовой самоорганизации запутанных состояний

Корректная оценка мощности квантовых вычислений возможна только с помощью установления корреляций между значениями переменных в КА в различные моменты времени.

В качестве примера рассмотрим систему из двух квантовых битов A и B . В соответствии с законом тензорного произведения векторных пространств размерность пространства H_{AB} составной системы AB определяется как произведение размерностей пространств H_A и H_B , т.е. как $H_{AB} = H_A \otimes H_B$. Вычислительный базис состояний $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ для составной системы AB выражается через базисные состояния систем A и B $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ тензорным произведением: $|x_1 x_2\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle, \forall (x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$. При этом в составной системе квантовых битов существуют состояния, которые не могут быть выражены через тензорное произведение отдельных компонент квантовых бит. Это свойство называется *запутыванием (entanglement)* или неразделимостью (*nonseparability*) квантовых состояний. Для различения квантовых состояний требуются квантовые измерения. Допустим, что Q – составная (из двух квантовых бит Q_1 и Q_2) система, которая находится в запутанном состоянии Белла

$$|\Psi_Q\rangle = \frac{|0_1 0_0\rangle - |1_1 1_0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Оператор плотности ρ_Q имеет представление:

$$\rho_Q = \left(\frac{|0_1 0_0\rangle - |1_1 1_0\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 0_1 0_0| - \langle 1_1 1_0|}{\sqrt{2}} \right)$$

Вычислим частный след ($Tr \equiv Trace$ - след) по состоянию второго квантового бита, т.е. системы Q_1 . В результате редуцированный оператор плотности $\rho_{Q_0} \equiv \rho_0$ имеет следующий вид:

$$\rho_0 = Tr_1(\rho_Q) = \frac{1}{2} [|0_0\rangle \langle 0_0| + |1_0\rangle \langle 1_0|] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I$$

При этом учитывалось, что состояния ортогональны: $\langle 0_1 | 0_1 \rangle = 1, \langle 0_1 | 1_1 \rangle = 0$ и т.п. Отметим, что в данном примере редуцированное состояние ρ_0 является смешанным, так как

$$Tr[(\rho_0)^2] = Tr\left[\left(\frac{I}{2}\right)^2\right] = \frac{I}{2} < I$$

Данный результат характеризует особое свойство квантовой системы, принципиально отсутствующее в классической системе. Приведенный пример свидетельствует о принципиальном различии между классическими и квантовыми состояниями. Так, классическая подсистема в единой системе должна находиться по определению в чистом состоянии, а для квантовой подсистемы это требование выполняется не всегда. Действительно, состояние составной системы чистое: $Tr[(\rho_Q)^2] = 1$ и определено точно (максимальная информация). Однако первый квантовый бит находится в смешанном состоянии.

Из определения энтропии фон Неймана $S^{vN} = -Tr(\rho \lg \rho)$ следует: $S^{vN}(A) = S^{vN}(B) = 1$. Тогда имеем:

$$S(AB) = S(B) + S(A \setminus B) = 1 - 1 = 0, \text{ т.к. } S(A \setminus B) = -1.$$

«Парадокс» состоит в том, что энтропия целой системы равна нулю, а энтропии двух подсистем положительны и имеют максимальное значение 1.

Данный факт означает, что информация, содержащейся в целой системе, меньше количества информации, содержащегося в каждой из подсистем.

Данное специфическое свойство структуры квантовых состояний сформулировал Шредингер следующим образом: «The best possible knowledge of a *whole* does not necessarily include the best possible knowledge of all its *parts*». Отмеченный парадокс разрешим за счет еще более странного свойства (с точки зрения теории информации Шеннона) – отрицательного значения условной энтропии. Эксперимент подтвердил утверждение, что две подсистемы в этом случае находятся в смешанных состояниях с отличной от нуля энтропией [1].

Измерением из данных подсистем можно получить только статистические знания. Следовательно, в отличие от классической теории информации Шеннона квантовая условная энтропия фон Неймана может принимать *отрицательные* значения, когда рассматриваются запутанные состояния.

Этот факт непосредственно связан с квантовой неразделимостью запутанных состояний, а сами они интерпретируются как гигантски (супер) коррелированные состояния.

Таким образом, отрицательность условной энтропии указывает на наличие запутанных состояний в составной квантовой системе и определяет нижнюю границу их корреляции.

Этот факт означает, что информация о состоянии данного квантового бита, не максимальна, а сама подсистема имеет более хаотическое поведение, чем составная.

Подобное странное для классических систем свойство, когда о составной системе имеется полная информация (энтропия равна нулю), а о подсистемах – только часть информации, характеризует способность квантовых систем к самоорганизации за счёт использования свойства супер-корреляции (квантовой корреляции), содержащейся в запутанных состояниях. Именно за счёт наличия квантовой корреляции у двух смешанных составных состояний появилась возможность организовать чистое состояние.

Рассмотрим модель обобщённого измерения на состоянии $A_i A_i^\dagger$, для которой матрица плотности имеет следующее определение: $\rho_B^i = \frac{A_i \rho_B A_i^\dagger}{\text{Tr}(A_i \rho_B A_i^\dagger)}$. Конечное состояние подсистемы B будет тогда

$\sum_i A_i \rho_B A_i^\dagger = \sum_i p_i \rho_B^i$. Энтропия редуцированного состояния равна $\sum_i p_i S(\rho_B^i)$. Количество классической информации, полученной на измерении i с вероятностью p_i , выражается как информационная энтропия Шеннона $H(p)$. Если квантовые состояния ρ_B^i принадлежат ортогональным подпространствам, то энтропия конечного состояния (после измерения) есть сумма редуцированной квантовой энтропии, $\sum_i p_i S(\rho_B^i)$ и классической информации, т.е. имеем:

$$S\left(\underbrace{\sum_i p_i \rho_B^i}_{\text{Полная}}\right) = \underbrace{H(p)}_{\text{Классическая}} + \underbrace{\sum_i p_i S(\rho_B^i)}_{\text{Квантовая}}$$

Поэтому моделируется классическая часть информации, а ее *дефицит* может быть определён [2]:

$$\Delta I = S\left(\underbrace{\sum_i p_i \rho_B^i}_{\text{Полная}}\right) - \underbrace{\sum_i p_i S(\rho_B^i)}_{\text{Квантовая}} = \underbrace{H(p)}_{\text{Классическая}}$$

Таким образом, количество информации, содержащейся в квантовом состоянии, может быть разделено (сцеплено в виде), на квантовую и классическую части.

Следовательно, можно извлечь, дополнительное количество ценной квантовой информации, например из индивидуальных БЗ для последующего использования при проектировании законов интеллектуального управления повышенного уровня [11, 12].

Рассмотрим теперь важный пример небулевой логики динамического поведения квантовой системы, который поясняет необычность (нелокальность) квантовых эффектов, влияющих на физическую интерпретацию результатов квантовых измерений и представляет определенную трудность при восприятии результатов интерпретации с позиции булевой логики [1, 13 – 15].

Данный пример важен при формировании инженерной интуиции системного проектирования сложных систем принятия решений в условиях риска и непредвиденных ситуациях управления.

В этом случае начальное состояние частицы приготовлено в виде суперпозиции из трех ящиков. После конечного отрезка времени конечное состояние системы находится в другом (неортогональном с начальным) состоянии суперпозиции. Было предсказано, что «слабое» промежуточное измерение состояния частицы в интервале между начальным и конечным состояниями определяет частицу в двух разных ящиках, с вероятностью 1.

Обсудим ниже основные особенности данного эффекта.

Пример 4: Квантовый парадокс «одновременное положение частицы в трех ящиках»

Допустим, что начальное состояние частицы приготовлено в виде суперпозиции из трех ящиков. После конечного отрезка времени состояние системы находится в другом (неортогональном с начальным) состоянии суперпозиции. Было предсказано [14], что «слабое» промежуточное измерение состояния частицы в интервале между начальным и конечным состояниями определяет частицу в двух разных ящиках, с вероятностью 1.

Рисунок 1 наглядно иллюстрирует «парадоксальность» логического вывода с точки зрения классической (булевой) логики.



Рис. 1. Логика «парадокса» трех ящиков

Обсудим ниже основные особенности данного эффекта.

В классической теории вероятностей эволюция вероятности перехода $P(x, t | x_0, t_0)$ движения частицы из начального (x_0, t_0) в конечное состояние (x, t) через промежуточное состояние (x', t') определяется в виде уравнения Чепмена-Колмогорова:

$$P(x, t | x_0, t_0) = \int P(x, t | x', t') P(x', t' | x_0, t_0) dx'.$$

При этом промежуточное состояние не влияет на конечный результат, а конечный результат не влияет на промежуточное значение (сохранение причинно-следственных связей и законов булевой логики). Рассмотрим квантовый аналог ситуации, когда заданы квантовая система S и три наблюдаемые A , B и C соответственно.

Для упрощения ситуация предположим, что наблюдаемые являются дискретными и однозначно определяются собственными состояниями (собственными векторами). Допустим, что в момент времени t_1 система S приготовлена в собственном состоянии $|a\rangle$ наблюдаемой A . Рассмотрим эволюцию системы S в виде перехода $A \rightarrow C \rightarrow B$. Согласно правилу Борна, вероятность получить результат c_i (где $\{c_i\}$ множество собственных значений наблюдаемой C) задается в виде $|\langle c_i | a \rangle|^2 = |\langle c_i || a \rangle|^2$.

Предположим, что результат c_i получен измерением в момент времени t . Предполагается также, что измерение таково, что после «слабого» взаимодействия с измерительным прибором после времени t система S находится в состоянии $|c_i\rangle$. В момент времени t_2 измеряется наблюдаемая B . Вероятность получить результат b определяется как $|\langle b | c_i \rangle|^2$. Тогда условная вероятность результата c_i и результата b , зависящего от приготовленного состояния $|a\rangle$, определяется в виде $P(c_i \wedge b | a) = |\langle b | c_i \rangle \langle c_i | a \rangle|^2$.

Рассмотрим вероятность $P(c_i | a, b)$ получить результат c_i в момент t при условии, что система S приготовлена в состоянии $|a\rangle$ в момент $t_1 < t$ и находится в состоянии $|b\rangle$ при $t_2 > t$. По определению условной вероятности (при $P(b | a) \neq 0$) имеем:

$$P(c_i | a, b) = \frac{P(c_i \wedge b | a)}{P(b | a)}.$$

Здесь $P(b | a)$ определяет полную вероятность значения b (при заданном $|a\rangle$), эквивалентную сумме $P(c_i \wedge b | a)$ по всем возможным значениям результата c_j . Тогда имеем:

$$P(c_i | a, b) = \frac{|\langle b | c_i \rangle \langle c_i | a \rangle|^2}{\sum_j |\langle b | c_j \rangle \langle c_j | a \rangle|^2} = \frac{\text{Tr}(P_b P_{c_i} P_a P_{c_i})}{\sum_j \text{Tr}(P_b P_{c_j} P_a P_{c_j})},$$

где P_a и P_b – проекторы на состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ соответственно. Это выражение носит наименование правило ABL (*Aharonov, Bergmann, Lebowitz*, 1964 (см., рис. 1) [14, 15]). Отметим, что правая часть данного уравнения определена не полностью, тогда как C определено точно.

Рассмотрим случай, когда квантовая частица находится в суперпозиционном состоянии в трех (изолированных друг от друга) закрытых одинаковых ящиках. Частица определена в заданном (pre-selected) состоянии суперпозиции в виде начального состояния $|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$, где $|A\rangle, |B\rangle$ и $|C\rangle$ обозначают локальное состояние частицы в ящиках A, B и C соответственно. Состояние частицы после измерения (post-selected) определяется как $|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$. Если идеальное (фон Неймана) измерение показало результат в промежуточное время, что частица находится в ящике A , то вероятность обнаружить частицу в ящике A после измерения равна 1, т.е., проекция $\hat{P}_A = |A\rangle\langle A| = 1$. Данный результат следует из правила ABL:

$$\Pr(\hat{P}_A) = \frac{|\langle \psi_{fin} | \hat{P}_A | \psi_{in} \rangle|^2}{|\langle \psi_{fin} | \hat{P}_A | \psi_{in} \rangle|^2 + |\langle \psi_{fin} | \hat{P}_B + \hat{P}_C | \psi_{in} \rangle|^2} = 1.$$

На рис. 2 показан рассмотренный выше процесс измерения.

Полученный результат согласуется также с интуитивным представлением без применения правила ABL: если частица не обнаружена в ящике A , то начальное состояние $|\psi_{in}\rangle$ проецируется в состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(|B\rangle + |C\rangle)$. Однако, по определению, данное состояние ортогонально к конечному состоянию $|\psi_{fin}\rangle$. Поэтому частица должна находиться в ящике A . Аналогично, вероятность обнаружить частицу в ящике B также равна 1, т.е., $\Pr(\hat{P}_B) = 1$.

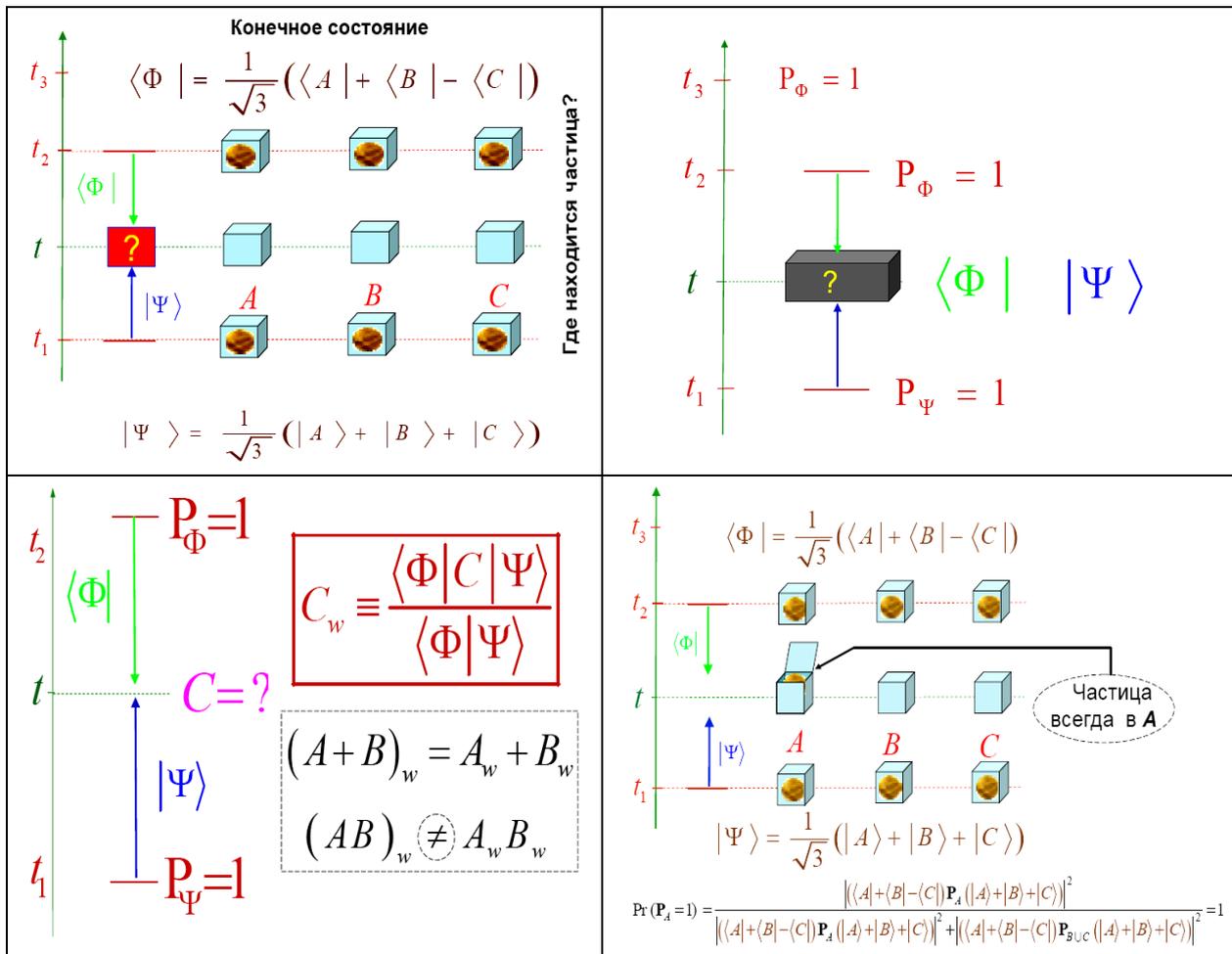


Рис. 2. Процесс квантовых измерений частицы в трех ящиках

Тогда, $\Pr(\hat{P}_A) = 1$, если открыт только ящик A . С другой стороны, имеем $\Pr(\hat{P}_B) = 1$, если открыт только ящик B . Таким образом, если начальное состояние $|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$, то проектор измерений $\Pi_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$, а для конечного состояния $|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$ имеем $\Pi_{fin} = |\psi_{fin}\rangle\langle\psi_{fin}|$. В промежуточном состоянии определяется состояние частицы в ящике A или B . Первое из указанных состояний определяется измерением $M\{P_1^M, P_2^M\}$, где

$P_1^M = |A\rangle\langle A|$, $P_1^M = |B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C|$. Для данного измерения имеем $\hat{P}_A = |A\rangle\langle A| = 1$. Для второго измерения $N\{P_1^N, P_2^N\}$, где $P_1^N = |B\rangle\langle B|$, $P_1^M = |A\rangle\langle A| + |C\rangle\langle C|$ имеем $\hat{P}_B = |B\rangle\langle B| = 1$.

Следовательно, если мы интересуемся положением частицы в промежуточном состоянии относительно ящика A , то найдем ее в ящике A с вероятностью 1. Аналогично, мы обнаружим частицу в ящике B с вероятностью 1, если мы в промежуточном состоянии интересуемся положением частицы относительно ящика B .

Этот феномен называется «парадокс трех ящиков».

По своей семантической выразительности данный феномен сродни утверждению теории относительности, что в 4-мерном пространственно-временном континууме длина криволинейного пути распространения частицы фотона (движения космического летательного аппарата) короче прямолинейного отрезка пути [16].

Однако если после времени t открыты оба ящика и проводится измерение одновременно, то частица отсутствует в обоих ящиках, т.е., $\hat{P}_A \hat{P}_B = 0$. Таким образом, если c_1, c_2 и c_3 – три разных действительных числа, и выражение для промежуточного состояния C в общем виде определено как суперпозиция $D = c_1 |u_1\rangle\langle u_1| + c_2 |u_2\rangle\langle u_2| + c_3 |u_3\rangle\langle u_3|$, то элементарные выкладки показывают, что $P(c_1 | a, b) = \frac{1}{3}$. Но если $D' = c_1 |u_1\rangle\langle u_1| + c_2 \{|u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|\}$, то $P(c_1 | a, b) = 1$.

В терминах задачи о ящиках, этот факт означает следующее. Если наблюдаемая (D') различает первый ящик от двух других (объединенных вместе), то вероятность нахождения частицы в первом ящике по правилу ABL равна 1.

В другом случае, когда наблюдаемая (D) различает три ящика один от другого, то вероятность нахождения частицы в первом ящике по правилу ABL равна $1/3$. Нетрудно видеть, что при $D = A$, $P(a|a, b) = 1$. Аналогично, если $C = B$, $P(b|a, b) = 1$.

Рассмотрим теперь положение частицы относительно ящика C . В этом случае обозначим:

$$\hat{P}_{tot} = (\hat{P}_A + \hat{P}_B + \hat{P}_C) = 1 \text{ и } \hat{P}_C = \frac{\langle \psi_{fin} | \hat{P}_{tot} - \hat{P}_A - \hat{P}_B | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_{fin} | \psi_{in} \rangle} = (\hat{P}_A + \hat{P}_B + \hat{P}_C) - \hat{P}_A - \hat{P}_B = 1 - 2 = -1.$$

Следовательно, в ящике C имеем (-1) , т.е., физически при измерении \hat{P}_C в промежуточном состоянии в ящике C имеем отрицательное давление, отрицательный заряд и т.п.

Данный результат привел *Albert, Aharonov and D'Amato* [15] к выводу о необходимости одновременно точно определять измерения некоммутирующих наблюдаемых A и B . Данное требование нарушает условие неопределенности измерения некоммутирующих наблюдаемых. Поэтому данное правило было применено к случаю промежуточных измерений при заданном (pre-selected) начальном и конечном измеренном (post-selected) состояниях. Однако проекторы \hat{P}_A и \hat{P}_B коммутируют.

Поэтому возникает вопрос: *возможно ли, что измерение в одном ящике может влиять на результат измерения в другом ящике?*

Вывод результата $\hat{P}_A = 1$ использует *информацию от обеих сторон суперпозиции состояний* (левая и правая стороны на рис. 1) выбранного (начального) $|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle)$ и измеренного (конечного) $|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle)$ векторов состояний. Аналогично вывод $\hat{P}_B = 1$ также использует информацию о начальном $|\psi_{in}\rangle$ и конечном $|\psi_{fin}\rangle$ состояниях.

На рис. 3 показан процесс влияния интерференции промежуточных результатов измерений на конечный результат. В общем случае, если $|\psi_1\rangle$ является собственным вектором \hat{A} с собственным значением a и $|\psi_2\rangle$ является собственным вектором \hat{B} с собственным значением b и $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, то (при условии, что \hat{A} и \hat{B} известны только при выборе начального или конечного состояний) правило произведения $\hat{A}\hat{B} = ab$ выполняется.

Однако, если \hat{A} и \hat{B} известны при выборе обоих, начального и конечного состояний, то правило произведения не выполняется и $\hat{A}\hat{B} \neq ab$, т.е., измерение одного из состояний может влиять на результат измерения другого состояния, несмотря на факт, что проекторы коммутируют.

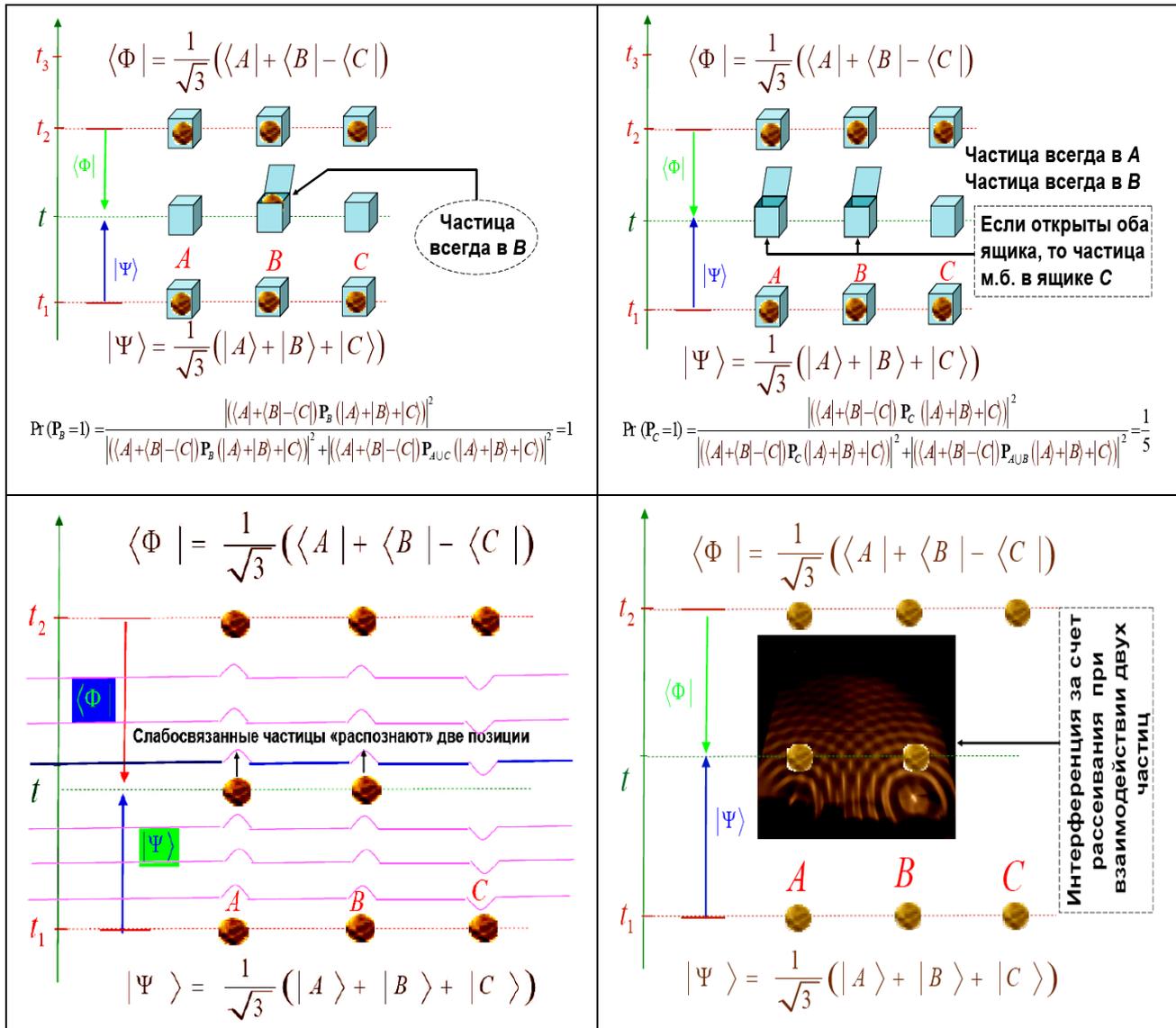


Рис. 3. Процесс влияния интерференции промежуточных результатов измерений на конечный результат (интерпретация Vaidman L., 2008 [14])

При этом вектор времени имеет две компоненты: первая компонента направлена от начального состояния к промежуточному состоянию (forward) и вторая компонента, направленная от конечного к промежуточному состоянию (backward). В результате при измерении в промежуточном состоянии происходит «коллапс» волновой функции (см. рис. 3). Поэтому (несмотря на свойство коммутации проекторов \hat{P}_A и \hat{P}_B , зависящее от начального и конечного состояний) измерение одного из них приводит к воздействию на другое измерение, что выражается в нарушении правила произведения.

Следовательно, в правиле ABL вероятность вычисления для c_1 зависит не только от собственного пространства, ассоциированного с собственным значением, но также дополнительно зависит от структуры квантовой наблюдаемой величины в ортогональном собственном пространстве. Таким образом, структура квантовых измерений приводит к *контекстуальной зависимости* интерпретации результата измерений и является примером небулевой логикой.

Эксперимент подтвердил существование описанного «парадокса» [17].

Отметим, что эффект формирования и применения атрибутов небулевой логики присущ также и классическим системам [18].

Пример 5: Полная, квантовая и классическая корреляции в процессе извлечения скрытой информации

Процесс оптимального извлечения ценной квантовой информации из классических состояний, образующих суперпозицию и рассмотренный выше в примере 1, базируется на следующих четырёх фактах в квантовой теории информации [2]: 1) существует эффективный квантовый алгоритм (КА) сжатия данных; 2) в квантовом состоянии присутствует «сцепленное» представление классической и квантовой информации; 3) полная корреляция в квантовом состоянии представляет собой «смесь» классической и квантовой корреляций; 4) присутствует скрытая (наблюдаемая, т.е. частично доступная извлечению) классическая корреляция в квантовом состоянии.

В качестве примера использованы корреляции между законами управления коэффициентами усиления двух нечётких ПИД-регуляторов. Для рассматриваемой ситуации возможны три вида квантовой корреляции (содержащих скрытую в спроектированных БЗ ценную квантовую информацию): *пространственная, временная и пространственно-временная*. Выбор вида корреляции определяется свойствами рассматриваемого ОУ [10, 11].

Отношение между полной, классической и квантовой типами корреляции (как меры неопределённости квантового состояния), определяется в следующем виде [11]:

$$\text{Полная неопределённость} = \text{Классическая часть} + \text{Квантовая часть}.$$

Данное соотношение выполняется для замкнутых квантовых состояний при измерении без обмена сообщениями между указанными частями. В открытой системе возможен дополнительно взаимный обмен сообщениями между активными агентами (расположенными на классических и квантовых уровнях) и между уровнями самоорганизации [1]. Это означает, что присутствует *взаимная* (смешанная) корреляция между *реальным* и *виртуальным* состояниями нормированных сигналов управления. Классическая корреляция в этом случае выступает частным случаем полной квантовой корреляции. При этом передача сообщений осуществляется по квантовым каналам, по которым осуществляется организация передачи суперпозиции сигналов с различными видами корреляции между агентами.

Согласно [11], такие квантовые каналы передачи информации являются специальным классом квантовых коррелированных (между входом - выходом) каналов связи, в которых достаточно иметь конечную память и возможно организовать новые квантовые стратегии передачи сообщений с простым протоколом связи. Кодирование сообщений в таких каналах связи с конечной памятью и особенностями смешанных каналов связи позволяют эффективно организовать передачу потоков информации через квантовые механизмы извлечения (декодирование) данных.

Следовательно, полная корреляция состоит из следующих частей: классическая (между реальными значениями нормированного сигнала управления); квантовая (между виртуальными значениями нормированного сигнала управления) и смешанная (между реальными и виртуальными значениями нормированного сигнала управления). Первые два типа корреляций исследуются в корреляционной теории случайных (классических и квантовых) процессов. При этом интенсивность квантовой корреляции выше классической корреляции (неравенство Белла).

Третий тип является новым в теории квантовых случайных процессов и отражает эффект *интерференции* классической и квантовой корреляций. Такой тип полной корреляции содержит скрытую классическую корреляцию в квантовых состояниях сформированной суперпозиции квантовых битов и служит информационным ресурсом для извлечения дополнительной (ненаблюдаемой) ценной квантовой информации. Физически классическая корреляция отвечает за самоорганизацию структуры на

макро-уровне; квантовая и смешанная корреляции отвечают за микро-уровень и передачу информации с микро- на макро-уровни соответственно [12].

С помощью внутренней и внешней типов корреляции осуществляется обмен информацией и координированное управление между коэффициентами усиления проектируемого робастного нечеткого ПИД-регулятора [11, 12].

Рассмотрим эффект извлечения скрытой и приращения дополнительной квантовой информации с точки зрения квантовой теории информации и его программное формирование в структуру КА самоорганизации БЗ.

Пример 6: Эффект извлечения скрытой квантовой информации

Без потери общности выделим простую ситуацию одностороннего обмена данными при определенном количестве скрытой (ненаблюдаемой) классической корреляции в квантовом состоянии. Будем интерпретировать процесс обмена данными между двумя БЗ (как процесс передачи информации по квантовому каналу связи) в виде игровой ситуации, допускающей обмен данными между игроками A и B , в пространстве размерности $d = 2^n$. Согласно законам квантовой механики, с помощью матрицы плотности ρ описывается начальное квантовое состояние, образованное двумя классическими состояниями (БЗ0 и БЗ1). Начальная матрица ρ рассматривается как стартовый информационный ресурс и распределяется между подсистемами A (БЗ0) и B (БЗ1) в пространстве размерности d ,

$$\rho = \frac{1}{2d} \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{t=0}^1 (|k\rangle\langle k| \otimes |t\rangle\langle t|)_A \otimes (U_t |k\rangle\langle k| U_t^\dagger)_B$$
. Здесь квантовые операторы $U_0 = I$ и U_1 переводят

исходный вычислительный базис в объединенный взаимно несмещенный базис (MUB – mutually unbiased basis) следующего вида: $|\langle i | U_1 | k \rangle| = 1/\sqrt{d} \quad \forall i, k$. В случае одностороннего обмена данными игрок A имеет полную информацию о состоянии игрока B , который в свою очередь выбирает состояние $|k\rangle$ случайным образом из пространства состояний размерности d в двух возможных случайных вычислительных базисах. Информационный ресурс состояния ρ используется по следующему алгоритму. Игрок A формирует случайную выборку длиной в n -битов и передает ее игроку B в состоянии $|k\rangle$ или $H^{\otimes n} |k\rangle$ в зависимости от случайного выбора бита $t = 0$ или 1 , где H является преобразованием Адамара, т.е. $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Игрок A посылает бит t игроку B без возможности наблюдения впоследствии сформированной в состоянии B корреляции.

Применения преобразования Адамара и измерения единичного квантового бита достаточно для приготовления состояния ρ и извлечения в дальнейшем ненаблюдаемой корреляции в новом состоянии ρ' . Через ρ и ρ' обозначены состояния до и после проведения операций обмена сообщениями $\rho' = \Lambda(\rho)$.

Начальная корреляция в состоянии ρ , малая величина и количество информации, содержащееся в нем, определяется как: $I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \frac{1}{2} \log d$. Количество информации в конечном состоянии после

полного измерения M_A в одностороннем обмене информацией равно: $I_{Cl}(\rho') = I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \log d + 1$, т.е. количество доступной извлеченной информации возросло.

Этот эффект невозможно описать на классическом уровне, он носит чисто квантовый эффект. При этом состояния, имеющие такое свойство, не обязательно должны быть запутанными, а соответствующий канал передачи информации может быть реализован с помощью преобразования Адамара. Поэтому, используя преобразование Адамара и эффект квантовой корреляции как физический носитель передачи сообщений между конечным числом спроектированных БЗ, можно добиться увеличения содержащейся информации в исходном квантовом состоянии за счет учета существующей скрытой классической корреляции.

Приведенные в примерах эффекты и результаты учитываются в этапах формирования соответствующей корреляции в суперпозиции реальных и виртуальных состояний сигналов управления.

Этот эффект невозможно описать на классическом уровне, он носит чисто квантовый эффект. При этом состояния, имеющие такое свойство, не обязательно должны быть запутанными, а соответствующий канал передачи информации может быть реализован с помощью преобразования Адамара. Поэтому, используя преобразование Адамара и эффект квантовой корреляции как физический носитель передачи сообщений между конечным числом спроектированных БЗ, можно добиться увеличения содержащейся информации в исходном квантовом состоянии за счет учета существующей скрытой классической корреляции.

Приведенные в примерах эффекты и результаты учитываются в этапах формирования соответствующей корреляции в суперпозиции реальных и виртуальных состояний сигналов управления.

Роль вычислительного базиса в технологии квантовых вычислений

Описание на квантовом языке постановок многих классических (слабо структурированных) инженерных задач (трудно решаемых на языке классической логики) позволяет найти их эффективное решение. Однако такой подход имеет ряд особенностей при практическом применении в задачах управления. В теории квантовой информации и квантовых вычислений понятию числа соответствуют понятия *наблюдаемой* и *суперпозиции* состояния наблюдаемых квантовой системы, а необратимое измерение дает одно из возможных состояний.

Рисунок 4 показывает физическое различие в определении вычислительного базиса мягких и квантовых вычислений.

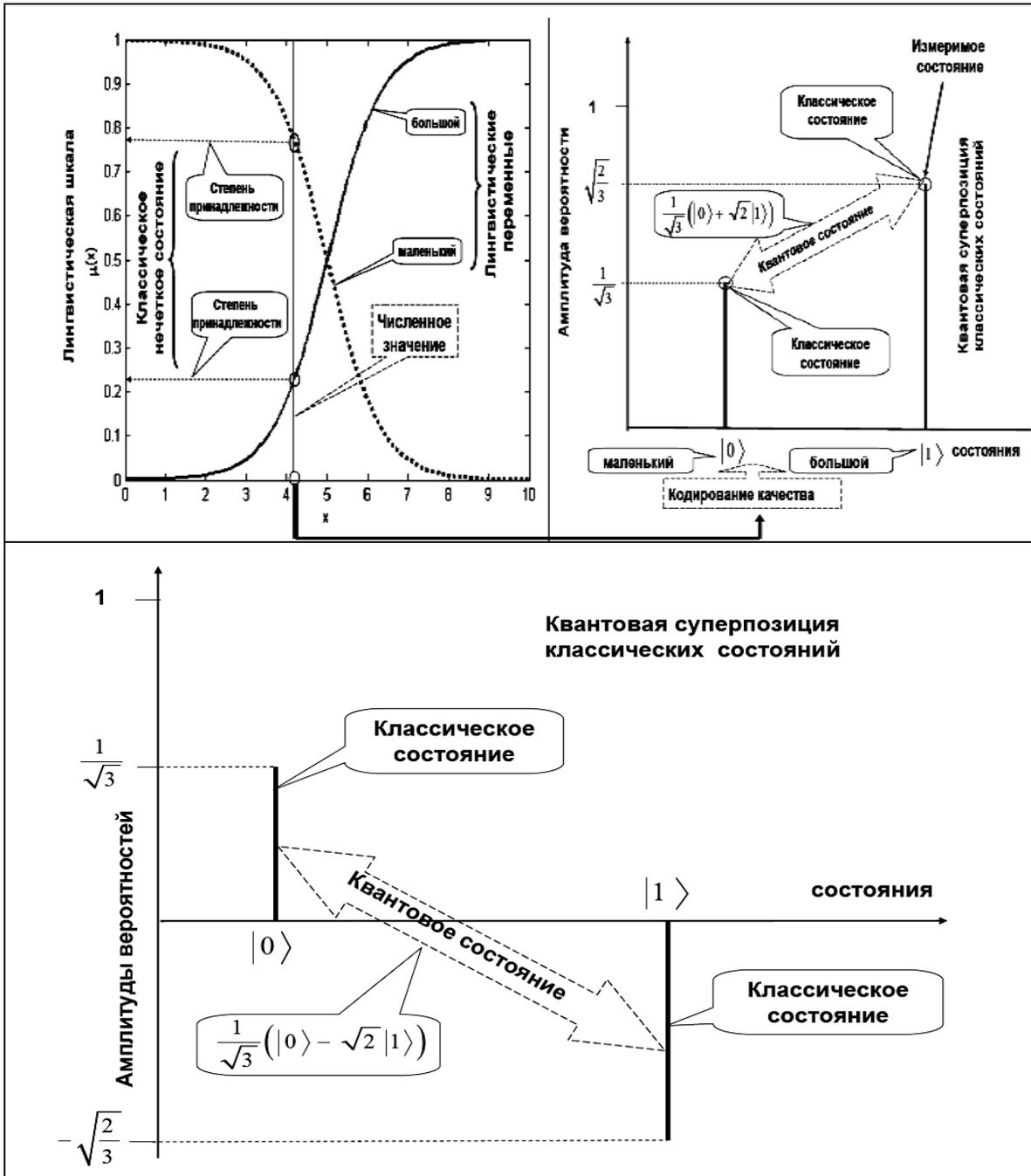


Рис. 4. Физическое различие между нечетким и квантовым состояниями

Рисунок 5 дает физическую интерпретацию значения квантовой суперпозиции (quantum superposition) с различными классическими состояниями типа: $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \sqrt{2}|1\rangle)$ (рис. 5,а) и $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle - \sqrt{2}|1\rangle)$ (рис. 5,б) (quantum states), соответственно.

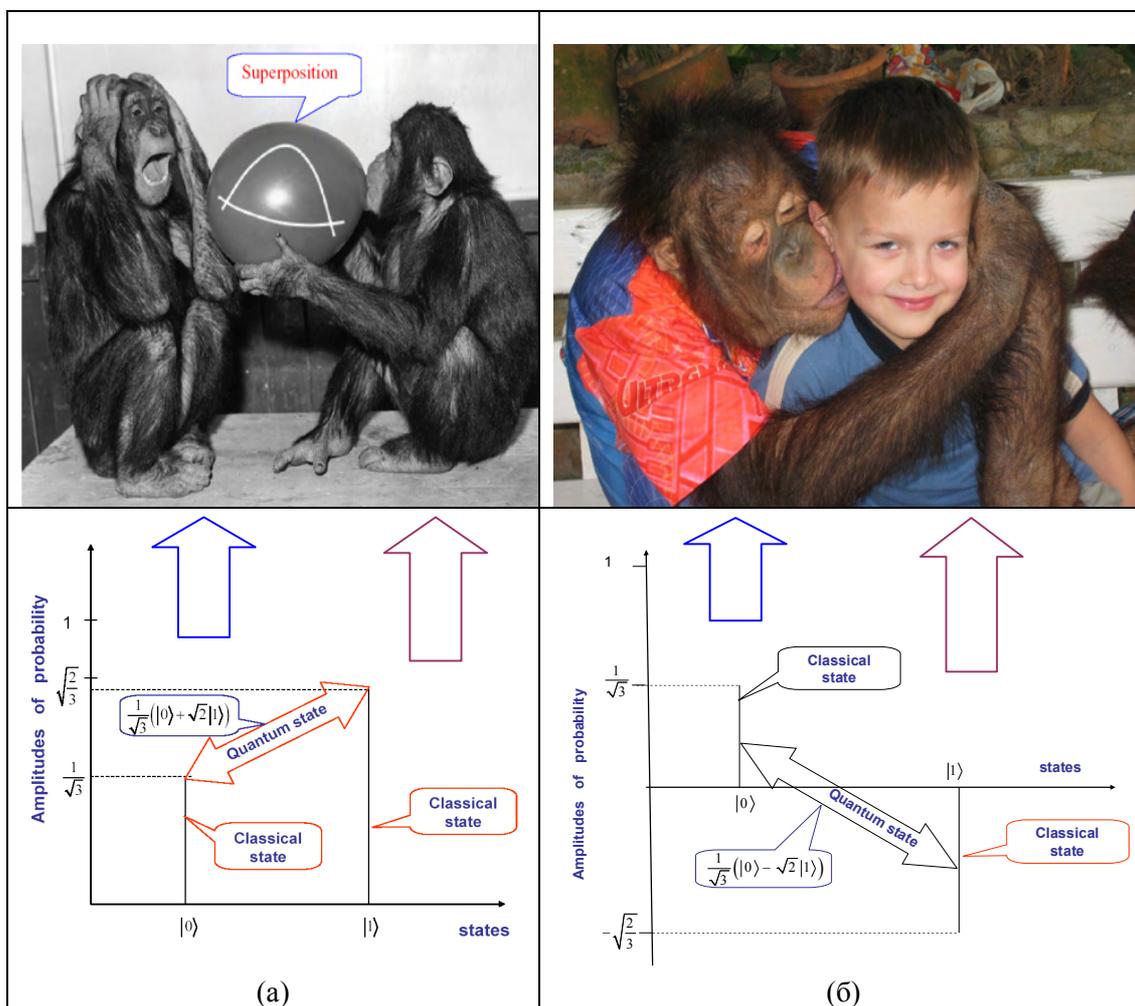


Рис. 5. Физическая интерпретация амплитуды вероятностей квантовых состояний

Согласно рис. 4, нечеткое состояние числа имеет *два значения* функции принадлежности на шкале лингвистического описания (принцип исключения третьего не выполняется), а квантовое состояние состоит из *двух классических состояний*, качественные характеристики которых закодированы в квантовых переменных $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, связанных принципом квантовой логической дополнителности и являются вычислительным базисом.

Из рис. 5 следует, что *амплитуды вероятностей* в квантовой механике могут быть отрицательными и отличаются от аксиоматики классической теории вероятностей Колмогорова.

Совместное использование вычислительных базисов, представленных на рис. 4, приводит к новому виду квантовых мягких вычислений.

Эффективность использования квантовых вычислений

Основной идеей эффективного использования квантовых вычислений являлось расширение функциональных возможностей (существующих или перспективных) персональных компьютеров с последующей коммерциализацией интеллектуального продукта (в частности, объединение с фирмами-разработчиками в области программно-аппаратной поддержки квантовых мягких вычислений). Возможность реализации на классическом персональном компьютере квантовых алгоритмов открывает

большие возможности коммерциализации такого наукоёмкого интеллектуального продукта и расширяет возможности интеллектуального перспективного бизнеса в реализации стандартной программно-аппаратной поддержки [5]. Сложность создания такого наукоёмкого интеллектуального продукта заключалась в существовании в теории квантовых вычислений обобщенного тезиса Черча-Тьюринга. Данный тезис утверждает, что для решения квантовых проблем классического компьютера последовательного действия (с архитектурой фон Неймана) недостаточно и необходим квантовый компьютер параллельных вычислений (введения принципа суперпозиции, т.е. новых операторов, отсутствующие в классическом компьютере).

Более того, лауреат Нобелевской премии Р. Фейнман в 1982г. показал, что при решении квантовых задач сложность решения на классическом компьютере возрастает экспоненциально в зависимости от входных переменных, т.е. практически решить задачу невозможно и необходимо применять квантовый компьютер.

Проблема казалась ясной, и применению классических компьютеров оставалась классическая область вычислительных задач. Однако разработанный автором данной работы подход [6] только на первый взгляд приводил к противоречию с обобщенным тезисом Черча-Тьюринга и выводами Фейнмана.

Для доказательства данного утверждения необходимо было провести дополнительный анализ структуры квантового алгоритма и его составляющих операторов с целью разработки нового алгоритма моделирования самих квантовых алгоритмов, позволяющего преодолеть «проклятие размерности» и ускорить моделирование исходного квантового алгоритма на персональном компьютере. В этом случае обобщенный тезис Черча-Тьюринга не нарушается и создается возможность решать практические задачи ограниченной размерности (зависящей от объема памяти персонального компьютера), не дожидаясь появления квантового компьютера [19].

Эффективное применение разработанного программного продукта моделирования квантовых алгоритмов на классическом компьютере можно найти в [20].

Разработанный квантовый алгоритм является новым квантовым поисковым алгоритмом.

Решение задачи проектирования робастного управления классическим ОУ (глобально неустойчивым и существенно нелинейным) рассматривается в качестве примера (Benchmark) эффективного использования разработанной информационной технологии проектирования. Данный пример, рассмотренный подробно в [11, 12, 21], иллюстрирует возможность эффективного применения технологии квантовых вычислений для решения таких алгоритмически неразрешимых задач классическими методами как проектирование глобальной робастности ИСУ в условиях непредвиденных ситуаций управления и обобщает результаты [22 - 25].

Положительные результаты применения классических технологий интеллектуальных вычислений (типа мягких вычислений) совместно с аппаратом квантовых вычислений привело к новому альтернативному подходу – применению технологии квантовых интеллектуальных вычислений в задачах оптимизации процессов управления классическими ОУ (физический аналог применения обратного метода исследования «квантовая система управления – классический ОУ»), что существенно расширяет возможности самих интеллектуальных вычислений.

Отметим некоторые важные направления исследований в области ИСУ на основе новых ИТ интеллектуальных вычислений.

Перспективные разработки ИСУ

В связи с интенсивным развитием нанотехнологий особое значение приобретают исследования в области интеллектуального квантового робастного управления в спинтронике, атомтронике, одноэлектронике, создании интеллектуальных самоорганизующихся наноматериалов, разработки новых программных и аппаратных продуктов прикладной информатики и высоких квантовых ИТ.

Особый интерес представляет также работа по инновационному менеджменту ИСУ и коммерциализации ОИС, позволяющая решать актуальные проблемы планирования выпуска и коммерциализации разработанных наукоёмких интеллектуальных продуктов в конкурентных условиях и экономического кризиса рынка экономики и интеллектуального труда.

Данные исследования проводятся в рамках НИР типа «Интеллектуальное управление рисками в бизнес-процессах разработки высоких наукоемких ИТ» и инноваций образовательных программ типа «Реинжиниринг бизнес-процессов» по направлению Прикладная информатика (включая интеллектуальные ИТ в нанотехнологиях и квантового управления) в Центре Управления Знаниями Института Системного Анализа и Управления (Международного Университета Природы, Общества и Человека «Дубна») под руководством профессоров С.В. Ульянова, Е.Н. Черемисиной, Ю.С. Сахарова и В.Н. Добрынина.

Результаты исследований, программы дисциплин и мастер-классы, проводимые в Центре Управления Знаниями (руководитель Центра профессор В.Н. Добрынин), позволяют многим университетским программам РФ и ближнего зарубежья использовать в учебном процессе накопленный международный опыт, современные тенденции и практические результаты при решении сложных и важных для народного хозяйства РФ задач подготовки востребованных рынком интеллектуального труда специалистов и менеджеров-аналитиков в области системного анализа и интеллектуальных систем управления.

Список литературы

1. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S., Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum optimal control and quantum filtering – Stability, robustness, and self-organization models in nanotechnologies. – Milan: Note del Polo (Ricerca), Universita degli Studia di Milano. – 2005. – Vol. 82; *ibid*: Applied quantum soft computing in AI, quantum language and programming in computer science, and intelligent wise robust control (4th edit.). – 2007. – Vol. 86.
2. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum probability, physics of quantum information and information geometry, quantum computational logic and quantum complexity. – Milan: Note del Polo (Ricerca), Universita degli Studia di Milano, 2005. – Vol. 83.
3. Ivancevic V. G., Ivancevic T.T. Quantum neural computation. – Tokyo: Springer – Verlag, 2009.
4. Studies in Computational Intelligence: Quantum Inspired Intelligent Systems. – Tokyo: Springer – Verlag, 2008. – Vol. 121.
5. Ulyanov S. S. Engineering management in the field of high information technology of fuzzy control system's design: Methods of intellectual property protection and business models of intelligent control systems // Proc. of the 7th ICAFS. – Siegen, 2006. – Pp. 218-239.
6. Ulyanov S.V. System and method for control using quantum soft computing // US patent. – 2003. – № 6,578,018 B1.
7. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Сложность конечных объектов и информационная теория управления // Итоги Науки и Техники. Сер.: Техническая кибернетика. – 1979. – Т. 11. – С. 77-147.
8. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Теория моделей процессов управления: Термодинамические и информационные аспекты. – М.: Наука, 1978.
9. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В., Ульянов С.С., Проектирование робастных баз знаний нечетких регуляторов для интеллектуального управления существенно-нелинейными динамическими системами. Ч. II // Изв. РАН. ТиСУ, 2006. – № 5. – С. 102-141.
10. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V. Soft computing optimizer of intelligent control system structures // US patent – 2007. – № 7,219,087 B2.
11. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В., Ульянов С.С., Квантовый нечеткий вывод для создания баз знаний в робастных интеллектуальных регуляторах // Изв. РАН, ТиСУ, 2007. – № 6. – С. 71-126.
12. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В., Интеллектуальные системы управления. Ч. I: Квантовые вычисления и алгоритм самоорганизации // Изв. РАН, ТиСУ, 2009. – № 6. – С. 69-97.
13. Laloë F. Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems // Am. J. Phys., 2001. – Vol. 69. – № 6. – Pp. 655-701.

14. Ravon T., Vaidman L. The three-box paradox revisited // J. Phys. A: Math. Theor., 2007. – Vol. 40. – Pp. 2873–2882.
15. Aharonov Y., Rohrlich D. Quantum Paradoxes: Quantum theory for the perplexed (Physics Textbook). – Weinheim, Cambridge: Wiley-VCH, 2005.
16. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и её приложения к новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.
17. Resch K.J., Lundeen J.S., Steinberg A.M. Experimental realization of the quantum box problem // Physics Letters A., 2004. – Vol. 324. – № 2-3. – Pp. 125-131.
18. Westmoreland M.D, Schumacher B.W. Non-Boolean derived logics for classical systems // Physical Review, 1993. – Vol. 48A. – № 2. – Pp. 977-985.
19. Ulyanov S.V. Efficient simulation system of quantum algorithm gates on classical computer based on fast algorithm // US patent. – 2006. – № 20060224547 A1.
20. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Takahashi K. Fast algorithm for efficient simulation of quantum algorithm gates on classical computer // Systemics, Cybernetics and Informatics, 2004. – Vol. 2. – № 3. – Pp. 63-68.
21. Добрынин В.Н., Решетников Г. П., Сахаров Ю.С. и др. Технологии квантовых и мягких вычислений в процессах проектирования систем интеллектуального управления // Системный Анализ в Науке и Образовании: электрон. науч. журнал. – №2. – 2010. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/16>.
22. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А. и др. Интеллектуальное управление динамическими системами. – М.: Физматгиз, 2000.
23. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В. и др. Искусственный интеллект и интеллектуальные системы управления. – М.: Наука, 2006.
24. Васильев В.И., Ильясов Б.Г. Интеллектуальные системы управления. Теория и практика. – М.: Радиотехника, 2009.
25. Ponce-Cruz P., Ramirez-Figueroa F.D. Intelligent control systems with Lab VIEW™. – Berlin: Springer Verlag, 2010.
26. Ульянов С.В. Физические модели интеллектуальных процессов управления: Квантовые, релятивистские и информационно-термодинамические аспекты // Автор. диссерт. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. – М.: ИФТП АН СССР, 1992.