УДК 519.72, 51-77, 330.4

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ РАЗДЕЛЕНИЯ НА ТОРГОВЫЕ ЗОНЫ

Тимирова Асия Наильевна

Аспирант;
Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет,
Кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем;
119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Главное здание;
e-mail: asiya@mail.ru.

Работа посвящена исследованию свойств нечетких моделей в экономике. Исследуется вопрос зависимости качества работы модели от качества исходной информации. Рассматривается нечеткая модель разделения на торговые зоны. Качество исходной информации оценивается как степень нечеткости соответствующих отношений «товар – потребительское качество» и «товар – фирма». Доказано, что монотонность отклика модели по отношению к степени нечеткости не сохраняется в общем случае. Подробно исследуются частные случаи, когда зависимость решения от качества исходной информации существует. Это выполняется лишь при соблюдении весьма искусственных ограничений. Оказывается также, что применение других операций с исходными отношениями также не приводит к сохранению степени нечеткости. Таким образом, анализируемая модель не позволяет гарантировать качество результата как функцию качества исходных данных, что требует осторожности при ее практическом применении.

Ключевые слова: нечеткая логика, нечеткая модель, устойчивость.

FUZZY STABILITY INVESTIGATION IN TRADE ZONE SEPARATION MODEL

Timirova Asiya

Postgraduate student;
Lomonosov Moscow State University, Department of Mathematics and Mechanics,
The Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems;
119991, Moscow, Leninskie Gory,1, Main building;
e-mail: asiya@mail.ru.

This paper analyzes properties of fuzzy models in economics. We investigate a question of dependence model work quality and initial data quality. Fuzzy model separating trade zones is considered. Initial data quality is estimated as a fuzziness degree of relations «goods – property» and «goods – firm». It is proved that model response monotonicity doesn't survive fuzziness degree in general case. Sometimes there exists a relationship between the model answer and initial data quality. Such particular cases are investigated in detail. They are performed in highly artificial constraints. Also other operation application doesn't lead to fuzziness degree preservation. Thereby analyzing model doesn't guarantee that model work quality is a function of initial data quality and should be used carefully.

Keywords: fuzzy logic, fuzzy models, stability.

Введение

Блоки обработки нечеткой информации присутствуют в большинстве современных пакетах математического моделирования экономических процессов и явлений и автоматизированных рабочих местах операторов экономической деятельности (биржевых брокеров, финансовых аналитиков, оценщиков и т.п.). Характерные постановки экономических задач, где применение нечетких множеств достигает впечатляющих результатов: стратегическое планирование, комплексный анализ состояния корпорации, кредитоспособность заемщика банка, оценка риска инвестиционного проекта, оптимизация фондового портфеля, оценка инвестиционной привлекательности ценных бумаг, прогнозирование фондовых индексов. Поэтому оценка качества таких моделей является актуальной и практически важной задачей.

Важным вопросом является изучение зависимости качества исходной информации и качества решения, в результате работы алгоритма. Очевидно, что если изначально исходная информация плохая, то и результат будет плохим.

В работе рассматривается нечеткая модель разделения на торговые зоны. Качество исходной информации оценивается как степень нечеткости соответствующих отношений «товар – потребительское качество» и «товар – фирма». Показано, что в случае максимальной неопределенности (все отношения равновозможны) мы получаем максимально неопределенный ответ модели. Далее, ставится задача исследовать монотонность отклика модели по отношению к степени нечеткости. Для этого вводится понятие степени нечеткости отношения. Для простейшей степени нечеткости (линейной функции) доказывается, что искомая монотонность сохраняется лишь при соблюдении достаточно сильных ограничений. Приводятся соответствующие контрпримеры. Выделены частные случаи, когда монотонность сохраняется. Доказывается более общее утверждение о том, что не существует степени нечеткости, сохраняющей монотонность для данной модели.

Далее предпринимается попытка заменить используемые в модели операции (умножение с последующей нормировкой) на минимаксную композицию операций, в которой умножение заменяется на минимум, а сумма на максимум. Минимаксная композиция – основа систем нечеткого логического вывода и является наиболее распространенным, классической композицией в теории нечетких множеств. Доказывается, что монотонность не выполняется и в этом случае. Полученные результаты говорят о том, что исследуемая модель не демонстрирует разумного поведения, и ее применение в практических задачах может привести к некорректным результатам.

1. Нечетко-множественный подход к построению моделей в экономике

Сегодня одним из наиболее перспективных направлений научных исследований в области анализа, прогнозирования и моделирования экономических явлений и процесов [6] является нечеткая логика.

Методы теории нечетких множеств начинают применяться в экономике начиная с конца 70-х годов [8, 9, 10]. В 80-х стали появляться программные решения и информационные технологии, решающие экономические задачи с применением нечетко-множественных и родственных им описаний. Так, под руководством Ц. Зопоунидиса в Техническом университете на острове Крит была разработана экспертная система для детального финансового анализа корпораций [19]. Чуть раньше в Германии, в конце 80-х годов, группой под руководством Х. Циммермана была разработана система стратегического планирования [18], в которой реализуется позиционирование бизнеса корпорации на основе нечетких описаний конкурентоспособности и привлекательности бизнеса.

Некоторое количество работ посвящено макроэкономическому анализу фондового рынка на основе нечетких представлений: К. Пирэй «Нечетко-множественный анализ инвестиционной деятельности взаимных фондов» [12]. Также нечеткие представления были положены в основу нейронных сетей для прогнозирования фондовых индексов: Г.А. Гунин «Особенности практического применения искусственных нейронных сетей к прогнозу финансовых временных рядов» [5].

Довольно быстро экономические приложения теории нечетких множеств образовали самостоятельное научное направление. Была создана международная ассоциация SIGEF (International Association for Fuzzy Set Management & Economy) со штаб-квартирой в Барселоне, которая регулярно апробирует новые результаты в области нечетко-множественных экономических исследований, проводя ежегодные конференции и выпуская журнал «Fuzzy Economic Review».

2. Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях

В работе [4] проводится теоретический анализ проблемы разделения на торговые зоны в нечетких условиях. Такие допущения, как постоянство транспортных расходов и одинаковые достоинства фирм, заменяются нечетким восприятием расстояния и привлекательностью фирм относительно различных характерных свойств. Предпочтение, отдаваемое потребителями той или иной фирме, представляется в виде выпуклого нечеткого подмножества для исследования перекрытия торговых зон. Устанавливается порог разделения. В этом подходе вместо четко очерченного описания торговых зон в традиционном анализе используется степень разделения.

Предложен метод исследования разделения торговых зон в нечетких условиях, когда информация по своей природе неполная и решение потребителя о поездке неточно.

Общая модель разделения торговой зоны. Пусть на рынке имеется несколько конкурирующих фирм, производящих продукцию одного качества. Фирмы характеризуются p признаками. Потребители при выборе фирмы руководствуются степенью важности признаков: одна фирма предпочитается другой, если ее признаки по своей степени важности более близки к оценке потребителя.

Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество покупателей, $Y=\{y_1,y_2,...,y_p\}$ – множество признаков фирм и $Z=\{z_1,z_2,...,z_m\}$ – множество фирм.

Пусть $\Phi_R : X\times Y \to [0,1]$ есть функция принадлежности нечеткого бинарного отношения R. Для всех $x\in X$ и всех $y\in Y$ функция $\Phi_R(x,y)$ – степень важности признака y по оценке покупателя x.

Отношение R можно представить в матричной форме

$$R=\begin{pmatrix} \Phi_R(x_1,y_1) & \Phi_R(x_1,y_2) & \dots & \Phi_R(x_1,y_p) \\ \Phi_R(x_2,y_1) & \Phi_R(x_2,y_2) & \dots & \Phi_R(x_2,y_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_R(x_n,y_1) & \Phi_R(x_n,y_2) & \dots & \Phi_R(x_n,y_p) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\pi_S : Y\times Z \to [0,1]$ – функция принадлежности нечеткого бинарного отношения S. Для всех $y\in Y$ и всех $z\in Z$ $\pi_S(y,z)$ равна степени совместимости фирмы z с признаком y. В матричной форме отношение S имеет вид

$$S=\begin{pmatrix} \pi_S(y_1,z_1) & \pi_S(y_1,z_2) & \dots & \pi_S(y_1,z_m) \\ \pi_S(y_2,z_1) & \pi_S(y_2,z_2) & \dots & \pi_S(y_2,z_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_S(y_p,z_1) & \pi_S(y_p,z_2) & \dots & \pi_S(y_p,z_m) \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу T :

$$T=\begin{pmatrix} \mu_{A_1}(x_1,z_1) & \mu_{A_2}(x_1,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_1,z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2,z_1) & \mu_{A_2}(x_2,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_2,z_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{A_1}(x_n,z_1) & \mu_{A_2}(x_n,z_2) & \dots & \mu_{A_m}(x_n,z_m) \end{pmatrix},$$

элементы которой определяются функцией принадлежности

$$\mu_{A_i}(x_j,z_i)=\frac{\sum\limits_{y}\Phi(x_j,y)\pi(y,z_i)}{\sum\limits_{y}\Phi(x_j,y)} \text{ для всех } x\in X, y\in Y \text{ и } z\in Z.$$

$\mu_{A_i}(x, z_i)$ можно интерпретировать как взвешенную *степень предпочтения фирмы* z_i покупателем x.

Функция предпочтения, описываемая уравнением (1), удовлетворяет определению выпуклого нечеткого подмножества $\mu_{A_i}[\lambda(x_1, z_i) + (1-\lambda)(x_2, z_i)] \geq \min[\mu_{A_i}(x_1, z_i), \mu_{A_i}(x_2, z_i)]$ для всех x_1 и x_2, всех $z_i \in Z$ и всех $\lambda \in [0,1]$.

Поскольку все $\mu_{A_i}(x, z_i)$ выпуклые, их пересечения также выпуклые функции. Таким образом, можно построить матрицы W:

$$W = \begin{pmatrix} \mu_{A_1}(x_1, z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_1, z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_1, z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_1, z_m) \\ \mu_{A_1}(x_2, z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2, z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_2, z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_2, z_m) \\ & \dots & \\ \mu_{A_1}(x_n, z_1) \wedge \mu_{A_2}(x_n, z_2) & \dots & \mu_{A_{m-1}}(x_n, z_{m-1}) \wedge \mu_{A_m}(x_n, z_m) \end{pmatrix}.$$

Порог разделения торговой зоны [11] в данной модели может быть ограничен условием

$$l < \min_{ij} \max_{x} \min[\mu_{A_i}(x, z_i), \mu_{A_j}(x, z_j)].$$

Если порог l выбран, то торговая зона $M_i, i = 1, 2, \dots, m$ описывается уровневым множеством

$$M_i = \{x \mid \mu_{A_i}(x) \geq l, x \in M_i\}.$$

3. Аппарат нечеткой логики

3.1. Измерение степени нечеткости множества

Нечеткие множества могут иметь разную степень нечеткости. Меры нечеткости важны в приложениях теории нечетких множеств. Этот показатель является параметром оценки качества различных процедур и алгоритмов в распознавании образов, принятии решений, моделях поиска информации [2 – 3] и т.п.

Аксиомы степени нечеткости множества формулируются следующим образом [1]:

$P1$. $\xi(A) = 0$ (минимально) для ситуации, когда A – обычное множество;

$P2$. $\xi(A_{0,5}) = 1$ (максимально);

$P3$. $\xi(A) \leq \xi(B)$, если $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0.5$ и $\mu_A(u) \geq \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0.5$ (в этом случае говорят, что A является заострением B);

$P4$. $\xi(A) = \xi(\overline{A})$ (симметриченость по отношению к $0,5$).

3.2. Измерение степени нечеткости отношения

Мы будем использовать понятие степени нечеткости множеств для отношений:

Определение 1 *Степенью нечеткости отношения* A, элементы которого принадлежат $[0,1]$, называется функция

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|}\sum_{i,j}\mu(a_{ij}),$$

где $|A|$ – количество элементов в матрице.

Рассмотрим конкретную степень нечеткости (меру): $\mu(u) = 1 - |2u - 1|$, где $u \in [0,1]$. Тогда,

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|}\sum_{i,j} 1 - |2a_{ij} - 1|.$$

Нетрудно видеть, что:

$\xi(A) = 0$ – в самом четком случае, т.е. когда все элементы $\in \{0,1\}$;

$\xi(A) = 1$ – в самом нечетком случае, когда все элементы равны 0.5;

$\xi(A) \in (0,1)$ – во всех остальных случаях.

4. Изучение свойств модели разделения на торговые зоны в нечетких условиях

Мы пытаемся понять зависимость степени нечеткости результата от степени нечеткости исходных данных. Будем рассматривать экономическую модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях.

4.1. Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях

По исходным отношениям R (клиент-признак), S (признак-фирма) получаем отношение T (клиент-фирма):

$$\underset{[n\times m]}{T} = \underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S},$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{np} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pm} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{pm} \end{pmatrix};$$

где $r_{ij}, s_{ij} \in [0,1]$, $t_{ij} = \dfrac{\sum_{k=1}^{p} r_{ik} \cdot s_{kj}}{\sum_{k=1}^{p} r_{ik}}$.

Рассмотрим случай, когда в R и S все элементы равны 0.5. Тогда в T все элемнты также будут равны 0.5.

По определению меры неопределенности $\mu(0.5) = 1$ значит, $\xi(R) = \xi(S) = \xi(T) = 1$ – максимальная степень неопределенности. Таким образом, из максимально неопределенных данных мы не можем получить ничего более определенного.

Будем исследовать, как работает алгоритм с точки зрения увеличения (уменьшения) нечеткости: если у исходных данных будет более четкая информация, будет ли более четким результат?

Пусть R – множество отношений R размера $[n \times p]$, а S – множество отношений S $[p \times m]$, элементы которых принадлежат отрезку $[0,1]$.

Определение 2 *Будем говорить, что пара* (R, S) сохраняет монотонность *относительно меры* μ*,* если для любых $R_1, R_2 \in \mathsf{R}, S \in \mathsf{S}$, таких что $\xi(R_1) < \xi(R_2)$, выполнено

$$\xi(R_1 * S) \le \xi(R_2 * S).$$

Утверждение 1

Чтобы исследовать монотонность в данной модели для n *клиентов, необходимо и достаточно рассматривать случай с одним клиентом.*

Доказательство.

1) Пусть S – такое отношение, что выполнено условие монотонности для n клиентов. Значит для S есть монотонность для одного клиента (можно рассмотреть R, у которой все строки одинаковые, т.е. один и тот же клиент).

2) Пусть S – такое отношение, что выполнено условие монотонности для одного клиента. Значит у S есть монотонность для n клиентов, т.к. мера нечеткости

$$\xi(\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{np} \end{pmatrix} * S) = \frac{1}{n}\left(\xi((r_{11} \dots r_{1p}) * S) + \dots + \xi((r_{n1} \dots r_{np}) * S)\right).$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим все степени нечеткости (меры неопределенности), удовлетворяющие аксиомам $P_1 - P_4$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если R, S *– все отношения размера* $[n \times p]$ *и* $[p \times m]$ *соответственно, элементы которых принадлежат отрезку* $[0,1]$*, то не существует меры неопределенности, которая сохраняла бы монотонность для* (R, S).

Частные случаи

Рассмотрим частные случаи, когда монотонность выполняется.

$$\xi(A) = \frac{1}{|A|}\sum_{i,j} 1 - |2a_{ij} - 1|.$$

1. R, S: $\sum_j r_{ij} = 1$, $\sum_j s_{ij} = 1$, тогда

$$T = \begin{pmatrix} (\bar{r}_1, \bar{s}_1) & \dots & (\bar{r}_1, \bar{s}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{r}_n, \bar{s}_1) & \dots & (\bar{r}_n, \bar{s}_m) \end{pmatrix},$$

где $\bar{r}_i$ – i-ая строка R, $\bar{s}_j$ – j-ый столбец S и $(\bar{r}_i, \bar{s}_j)$ – скалярное произведение векторов.

Имеют место следующие утверждения:

Утверждение 2

Пусть отношение R *такое, что* $\sum_j r_{ij} = 1$. *Тогда:*

1) если $r_{ij} \le 0.5$, *то* $\xi(R) = \frac{2}{p}$;

2) если $r_{ij} \ge 0.5$, *то* $\xi(R) = \frac{2(p-1)}{p}$.

Утверждение 3

1) Пусть $\mathsf{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1, r_{ij} \le 0.5\}$, $\mathsf{S} = \{S : \sum_j s_{ij} = 1, s_{ij} \le 0.5\}$, $R_1, R_2 \in \mathsf{R}$ *и отношение* $S \in \mathsf{S}$ *такая, что все скалярные произведения любой строки из* $R_k, k = 1,2$ *и любого столбца из* S ≤ 0.5: $(\bar{r}_i, \bar{s}_j)$ *меньше либо равно 0.5. Тогда:*

$$\xi(R_1 * S) = \xi(R_2 * S).$$

2)Пусть $\mathsf{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1, r_{ij} \ge 0.5\}$, $\mathsf{S} = \{S : \sum_j s_{ij} = 1, s_{ij} \ge 0.5\}$, $R_1, R_2 \in \mathsf{R}$ *и отношение* $S \in \mathsf{S}$ *такое, что все скалярные произведения любой строки из* $R_k, k = 1,2$ *и любого столбца из* $S \ge 0.5$: $(\bar{r}_i, \bar{s}_j)$ *больше либо равно 0.5. Тогда:*

$$\xi(R_1 * S) = \xi(R_2 * S).$$

Утверждение 4

$\underset{[n\times p]}{R} * \underset{[p\times m]}{S} = \underset{[n\times m]}{T}$, $\mathsf{R} = \{R : \sum_j r_{ij} = 1\}$. *Тогда* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} r_{ik}\alpha_k$, *где* α_k *– сумма элементов* k *-той строки в* S.

Утверждение 5. Необходимое условие монотонности

$\mathsf{R} = \{R : R = (0,\ldots,0,x,0,\ldots,0,1-x,0,\ldots,0)\}$.

Пусть S *содержит отношение* S, *такое, что в нем есть две строки* $\beta, \gamma : \xi(\beta) \ne \xi(\gamma)$. *Тогда для пары* R, S *нет монотонности.*

4.2. Модель разделения на торговые зоны в нечетких условиях с применением минимаксной композиции

Как видно из Теоремы 1, используемые в модели операции не позволяют гарантировать сохранение монотонности степени нечеткости. В теории нечетких множеств для получения композиции нечетких отношений используется $\min - \max$-ная композиция. Это специальное умножение, в котором умножение заменяется на min, а сумма – на $\max$.

Здесь мы пытаемся изучить сохранение монотонности для таких операций, т.к. они являются стандартными для нечетких моделей. Кроме того, минимаксная композиция – основа систем нечеткого логического вывода и является наиболее распространенной классической композицией в теории нечетких множеств.

Теорема 2

Если R,S *– все отношения размера* $[n\times p]$ *и* $[p\times m]$ *соответственно, то не существует меры неопределенности, которая сохраняла бы монтонность для* (R,S) *в случае минимаксного отношения.*

4.3. Устойчивость

При практическом применении любой математической модели важным аспектом является ее устойчивость. Так как исходные параметры могут быть измеренными с какой-то степенью точности, возникают ошибки измерения. Если модель чувствительна к такого рода естественным ошибкам, вопрос практического ее применения требует дополнительных верификаций.

Рассмотрим ситуацию, когда исходные отношения заданы не абсолютно точно, а с некоторой малой погрешностью $\delta > 0$.

Пусть $A=(a_{ij})$ – матрица. Обозначим:

$$A^{\delta}=(a_{ij}^{\delta}), \text{где } a_{ij}^{\delta}\in[a_{ij}-\delta,a_{ij}+\delta];$$

$$A^{+\delta}=(a_{ij}+\delta),\ A^{-\delta}=(a_{ij}-\delta).$$

Ясно, что $A^{-\delta}\le A^{\delta}\le A^{+\delta}$. Пусть $\alpha=a_1+\ldots+a_p$.

В рамках нашей модели имеем: $A=(a_1,\ldots,a_p)$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \end{pmatrix}$.

Попытаемся получить точные верхние и нижние оценки для $A^{\delta}*B$ и $A*B^{\delta}$.

4.3.1. Устойчивость по первому параметру

Рассмотрим $A^{\delta}=(a_1+\beta_1,\ldots,a_p+\beta_p)$, где $\beta_i\in[-\delta,+\delta]$.

Пусть $\beta=\beta_1+\ldots+\beta_p$. По определению операции * имеем:

$$A*B=\left(\frac{\sum_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha},\ldots,\frac{\sum_{i=1}^{p}a_ib_{im}}{\alpha}\right),\ A^{\delta}*B=\left(\frac{\sum_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{i1}}{\alpha+\beta},\ldots,\frac{\sum_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{im}}{\alpha+\beta}\right).$$

Преобразуем выражение для членов $A^{\delta}*B$. Без ограничения общности рассмотрим первый член:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha}-\frac{2\delta p}{\alpha}\le\frac{\sum_{i=1}^{p}(a_i+\beta_i)b_{i1}}{\alpha+\beta}\le\frac{\sum_{i=1}^{p}a_ib_{i1}}{\alpha}+\frac{2\delta p}{\alpha}.$$

Следовательно, получаем устойчивость:

$$A*B-\frac{2\delta p}{\alpha}M^1 \le A^\delta * B \le A*B+\frac{2\delta p}{\alpha}M^1,$$

где M^1 – отношение, состоящее из единиц.

4.3.2. Устойчивость по второму параметру

Рассмотрим отношение $B^\delta = \begin{pmatrix} b_{11}+\beta_{11} & \dots & b_{1m}+\beta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}+\beta_{p1} & \dots & b_{pm}+\beta_{pm} \end{pmatrix}$, где $\beta_{ij} \in [-\delta, +\delta]$.

Пусть $\beta = \beta_{11} + \ldots + \beta_{pm}$.

1) Сравним члены строки $A*B^\delta$ и строки $A*B^{+\delta}$. Без ограничения общности рассмотрим первые элементы строк:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i(b_{i1}+\beta_{i1})}{\alpha} \le \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i(b_{i1}+\delta)}{\alpha}, \text{ т.е. } A*B^\delta \le A*B^{+\delta}.$$

2) Аналогично сравнивая члены строки $A*B^\delta$ и строки $A*B^{-\delta}$ получаем: $A*B^\delta \ge A*B^{-\delta}$.

3) В итоге получили: $A*B^{-\delta} \le A*B^\delta \le A*B^{+\delta}$.

Рассмотрим члены строки $A*B^\delta$. Без ограничения общности будем рассматривать первый член:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i(b_{i1}+\delta)}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i b_{i1}}{\alpha} + \delta.$$

Тогда $A*B^{+\delta} = A*B + \delta M^1$. Аналогично $A*B^{-\delta} = A*B - \delta M^1$, где M^1 – отношение, состоящее из всех единиц.

Следовательно, получили устойчивость

$$A*B - \delta M^1 \le A*B^\delta \le A*B + \delta M^1.$$

Список литературы

1. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. – М.: Диалог-МГУ, 1998.
2. Рыжов А.П. Степень нечеткости лингвистической шкалы и ее свойства. Нечеткие системы поддержки принятия решений. Под редакцией Аверкина А.Н. и др. – 1998. – С. 82-92.
3. Рыжов А.П.. Об одном методе оптимального описания объектов и ситуаций в интеллектуальных системах // Создание и применение гибридных экспертных систем: Тезисы докладов Всесоюзной конференции. – Рига, 1990. – 34(1). – С. 62-64.
4. Леунг Й. Разделение на торговые зоны в нечетких условиях. Теория возможностей и ее применение. – М.: Наука, 1992.
5. Гунин Г.А. Особенности практического применения искусственных нейронных сетей к прогнозу финансовых временных рядов // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении. – 2001.

6. Ведерников В.В. Нечетко-множественное моделирование в анализе и прогнозировании экономических явлений и процессов: исторический аспект // Евразийский международный научно-аналитический журнал. – 2006. – 1/2(17/18).
7. Aliev R.A. Modelling and stability analysis in fuzzy economics // Applied and Computational Mathematics. – 2008. – Vol.7. – №1.
8. Bojadziev G.. Fuzzy logic for business, finance and management //Advances in Fuzzy Systems. – 1997. –12.
9. Buckley J. The fuzzy mathematics of finance // Fuzzy Sets and Systems. –1987. – 21.
10. Buckley J. Solving fuzzy equations in economics and finance // Fuzzy Sets and Systems. –1992. – 48.
11. Negoita C. V. On the application of the fuzzy sets separation theorem for automatic classification in information retrieval systems. Inf. Sci. – 1973. – Vol. 5. – Pp. 279-286.
12. Peray K. Investing in mutual funds using fuzzy logic. – St. Lucie Press, USA, 1999.
13. Pipkin J. S. Fuzzy sets and spatial choice. // Ann. Assoc. Am. Geographers. – 1978. – 68. –Pp. 196-204.
14. Ponsard C. Fuzzy economic spaces. Document de travail №43. – Institute de Mathematiques Economiques, Universite de Dijon, 1980.
15. Ponsard C. Produser's spatial equilibrium with a fuzzy constraint. Document de travail №.46. – Institute de Mathematiques Economiques, Universite de Dijon, 1980.
16. Pred A. Behavior and location. Part I. The Royal University of Lund. – 1967. – Pp. 110-120.
17. Zadeh L. A. Fuzzy sets. Information and Control. – November 1965. – 8(1). – Pp. 338-353.
18. Zimmerman H. Fuzzy Sets Theory – and Its Applications. – Kluwer Academic Publishers, 2001.
19. Zopounidis C. and oth. Fuzzy Sets in Management, Economy and Marketing. – World Scientific Pub Co, ISBN 10247532, 2002.