

УДК 514.851: 531.714.2

## **РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ, ПОЛУЧЕННОЙ ИЗМЕРЕНИЕМ ГЕОМЕТРИИ ИЗДЕЛИЙ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАШИН**

**Кашуба Леонид Анатольевич<sup>1</sup>, Проходцев Егор Алексеевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Кандидат технических наук, доцент Института системного анализа и управления;  
ГБОУ ВПО «Международный университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: leonid-ak@mail.ru.

<sup>2</sup>Студент;  
МГТУ им. Н. Э. Баумана;  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5;  
e-mail: e.prokhodtsev@gmail.com.

*Геометрия номинальных элементов представлена в номинальной системе координат проекта. Измеренная с помощью координатно-измерительных машин в системе координат системы измерения реальная геометрия элементов отличается от номинальной геометрии по форме и расположению. В статье обоснованы и представлены основы обработки измерительной информации для определения отклонений формы и расположения пространственных реальных элементов детали.*

**Ключевые слова:** номинальный элемент, реальный элемент, номинальная система координат, система координат системы измерения, отклонение формы, отклонение расположения, погрешности формы и расположения.

## **DEVELOPMENT OF SYSTEMS OF INFORMATION PROCESSING, THE OBTAINED MEASUREMENT OF THE GEOMETRY OF PRODUCTS WITH THE HELP OF COORDINATE-MEASURING MACHINES**

**Kashuba Leonid<sup>1</sup>, Prokhotsev Yegor<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Candidate of Science in Engineering, associate professor of Institute of system analysis and management;  
Dubna International University of Nature, Society and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: leonid-ak@mail.ru.

<sup>2</sup>Student;  
Bauman MSTU;  
105005, Moscow, 2-ya Baumanskaya str., 5;  
e-mail: e.prokhotsev@gmail.com.

*The geometry of the elements presented in nominal rated project coordinate system. Measured with a coordinate measuring machines in the coordinate system of measuring the actual geometry of the elements is different from the nominal geometry of the shape and location. In article, and the fundamentals of processing of the measuring data to determine deviations of form and position of the spatial elements of the real part.*

**Keywords:** nominal element, real element, nominal system of coordinates, system of coordinates of system of measurement, form deviation, deviation of an arrangement, form and arrangement error.

## Введение

Объектами машиностроения являются физические тела. Изделия машиностроения<sup>1</sup> представляют собой результат сборки<sup>2</sup> совокупности деталей, являющихся наименьшими частями машин. В машиностроении геометрия изделий играет определяющую роль. Геометрия пронизывает все стадии и этапы жизненного цикла изделия.

Наименьшим элементом конструкции любой машины является деталь.

*Деталь – тело*, ограниченное от окружающей конечным множеством *поверхностей* разной *величины*<sup>3</sup>, *размеров*<sup>4</sup> и *формы*<sup>5</sup>. Геометрические элементы<sup>6</sup> детали взаимодействуют друг с другом. *Поверхности* детали пересекаются или сопрягаются по *рёбрам* или *линиям сопряжения*. В местах пересечения более чем двух поверхностей, а также двух линий пересечения или сопряжения образуются *точки* пересечения.

Геометрические элементы могут быть:

- с кривизной (их бесконечно большое количество) и без кривизны (это прямая линия и плоскость);
- несимметричные (их больше) и симметричные с осевой или центральной симметрией (их меньше).

Анализ представлений о геометрии детали начнём с *недеформируемой детали*<sup>7</sup>.

Замысел геометрии деталей, как и всякого другого элемента конструкции, рождается в *номинальной геометрии поверхностей*<sup>8</sup>, заданных в *собственных системах координат поверхностей*<sup>9</sup> и представляемых в *системе координат проекта*<sup>10</sup>. Геометрию замысла называют *номинальной геометрией детали*<sup>11</sup>.

*Реальную геометрию детали*<sup>12</sup> получают после изготовления из *заготовок*<sup>13</sup> по выбранному *технологическому процессу*<sup>14</sup> на выбранном *оборудовании*<sup>15</sup> с помощью выбранных средств

---

<sup>1</sup>*Изделие* – единица промышленной продукции, количество которой может исчисляться в штуках (экземплярах). К изделиям относят следующие структурные элементы: детали, комплекты, узлы, сборочные единицы, комплексы (см. ГОСТ 2.102-68(1995)).

<sup>2</sup>*Сборка* – образование соединений составных частей изделия.

<sup>3</sup>*Величина* – одно из основных математических понятий, устанавливающее отношение неравенства: две величины  $a$  и  $b$  одного и того же рода или совпадают ( $a = b$ ), или первая меньше второй ( $a < b$ ), или вторая меньше первой ( $b < a$ ).

<sup>4</sup>*Размер* – числовое значение линейных величин (диаметра, длины, угла и т.п. геометрических параметров) в выбранных единицах измерения.

<sup>5</sup>*Форма элемента* – (лат. *forma* – форма, внешний вид): внешнее очертание, наружный вид, контуры геометрического элемента.

<sup>6</sup>*Геометрический элемент* – обобщённый термин, под которым в зависимости от соответствующих условий может пониматься точка, линия, поверхность, профиль, тело.

<sup>7</sup>*Недеформируемая деталь* – деталь, изготовленная из неупругого, абсолютно жёсткого материала.

<sup>8</sup>*Номинальная геометрия поверхности* – идеальная поверхность, номинальная форма которой задана чертежом или другой технической документацией.

<sup>9</sup>*Собственная система координат поверхности* – система координат, в которой однозначно определены координаты точек геометрии поверхности без аффинного переноса и поворота.

<sup>10</sup>*Система координат проекта* – система координат, в которой представляют собственные *системы координат номинальных поверхностей*.

<sup>11</sup>*Номинальная геометрия детали* – обобщённый термин, под которым в зависимости от соответствующих условий понимается *номинальные величины, форма и размеры геометрических элементов*, имеющие *номинальное расположение в системе координат проекта* без отклонений формы и расположения, обусловленных средствами технологического оснащения и технологией изготовления.

<sup>12</sup>*Реальная геометрия детали* – совокупность поверхностей, ограничивающая деталь и отделяющая ее от окружающей среды.

технологического оснащения (СТО): *технологической оснастки*<sup>16</sup>, *приспособлений*<sup>17</sup>, *инструментов*<sup>18</sup>. Таким образом, реальная геометрия детали является следствием технологии и СТО, что и должно учитываться при проектировании её облика. Выбранными *средствами измерения*<sup>19</sup> в *системе координат системы измерения*<sup>20</sup> определяют реальную геометрию детали.

Реальная геометрия детали отличается от её номинальной геометрии.

Наиболее полную и достоверную информацию о реальной геометрии детали в системе координат системы измерения можно получить с помощью 3D координатно-измерительных машин<sup>21</sup> (КИМ). По способу измерения координат точек реальных поверхностей их можно разделить на *контактные* и *бесконтактные*.

Эти машины определяют координаты точек реальных поверхностей в системе координат системы измерения либо «ощупыванием» реальных поверхностей изделий (рис. 1, а), либо определением координаты точек тех же поверхностей лазерным интерферометром по времени пролёта луча света от источника излучения до контролируемой поверхности (рис. 1, б).



Контактная КИМ



Бесконтактная КИМ

Рис. 1. Виды координатно-измерительных машин:  
а – контактные, б – бесконтактные (лазерные)

В результате сканирования реальных поверхностей деталей в системе координат системы измерения со скоростью до 10000 точек/сек, разрешением 0,5 мкм и точностью не хуже 10+0,4 мкм/м

<sup>13</sup> *Заготовка* – не вполне готовое изделие или его часть, обрабатываемые окончательно в процессе производства, полупродукт

<sup>14</sup> *Технологический процесс* – часть производственного процесса, содержащая целенаправленные действия по изменению и (или) определению состояния детали.

<sup>15</sup> *Технологическое оборудование* – средства технологического оснащения, в которых для выполнения определенной части технологического процесса размещают материалы или заготовки, средства воздействия на них, а также технологическую оснастку.

<sup>16</sup> *Технологическая оснастка* – средства технологического оснащения, дополняющие технологическое оборудование для выполнения определенной части технологического процесса.

<sup>17</sup> *Приспособление* – технологическая оснастка, предназначенная для установки или направления предмета труда или инструмента при выполнении технологического процесса.

<sup>18</sup> *Инструмент* – технологическая оснастка, предназначенная для воздействия на предмет труда с целью изменения его состояния.

<sup>19</sup> *Средство измерения* – технологическая оснастка, предназначенная для измерения состояния его геометрии и физических свойств.

<sup>20</sup> *Система координат системы измерения* – система координат, в которой представлены измеренные координаты точек реальной геометрии элемента

<sup>21</sup> *Координатно-измерительная машина* – устройство для измерения геометрических характеристик объекта. Машина может управляться вручную оператором или автоматизировано компьютером. Измерения проводятся посредством зонда, прикрепленного к подвижной части машины. Измерительные зонды могут быть механического, оптического, лазерного типа, дневного света, и другими.

(для бесконтактных FARO Laser Tracker), формируется массивы облаков точек, принадлежащих поверхностям, определяющих границы реальных тел.

Далее можно с помощью интеллектуальных специальных инструментов перевести трехмерные сканированные данные в параметрические объекты САПР и произвести с ними следующие действия:

- почистить облака точек, полученных с КИМ;
- убрать лишнюю геометрию, «попавшую в кадр»;
- уменьшить разброс точек от среднего значения.

Посредством простых манипуляций можно конвертировать облако точек в полигональную сетку. Инструменты (например, Geomagic Studio) помогут как в ручном, так и в автоматическом режиме «вылечить» модель и убрать все дефекты.

После получения качественной полигональной модели остаются три пути:

- использовать полигональную модель, загрузив в графический редактор типа Autodesk 3ds Max;
- создать NURBS-поверхности на основе полигонов и, если модель, имеющая сложные формы, отправить на доработку дизайнеру или на станок ЧПУ;
- создать параметризованную модель и передать ее в САПР.

Все эти процедуры необходимы для *обратного инжиниринга* [1], применяемого для восстановления геометрии детали, когда неизвестна информация об исходной геометрии детали (3D-модели или чертеже детали) и применявшихся средствах технологического обеспечения (СТО), объединяющих инструменты, оборудование и приспособления при реализации технологии её изготовления.

Задача *прямого инжиниринга* является не менее актуальной.

Она заключается в непрерывном отслеживании состояния геометрии детали в процессе её изменения при переходе от исходного состояния (заготовки), к завершённом состоянию (детали) перед передачей на последующие этапы жизненного цикла изделия: сборку с другими деталями, функционированию в соответствии со служебным назначением и износом в процессе эксплуатации вплоть до утилизации.

Координаты точек реальных поверхностей детали на разных этапах их формирования получают с помощью КИМ и представляют в системе координат системы измерения.

Суждение об отличии геометрических параметров реальной детали, полученных после её точного измерения с помощью КИМ в *системе координат системы измерения*, от геометрических параметров детали, представленных в *системе координат проекта* можно получить только после адекватной и достоверной обработки данных измерений. Для этого в систему обработки данных необходимо ввести данные о номинальной геометрии детали в виде 3D модели.

Возникает вопрос: рассматривать ли всю деталь как целое, или по отдельным поверхностям, ограничивающим объём детали?

Рассматривать всю деталь как целое и сравнивать геометрию реальной детали с номинальной геометрией детали можно, но неэффективно. Если рассматривать элементы детали с привычных позиций назначения допустимых ограничений формы и расположения поверхностей, то переход от рассмотрения геометрии детали в целом к реальным поверхностям, ограничивающим объём детали, сулит большие перспективы при решении задач оптимизации ограничений на отклонения формы и расположения поверхностей (допусков на них) в конструкторской и технологической документации.

## 1. Номинальные и реальные поверхности

Рассмотрим представления о геометрии деталей, принятые в машиностроении, с позиций формирования представлений о поверхностях и детали в целом. Деталь – тело, ограниченное совокупностью пересекающихся или сопрягающихся поверхностей. Поверхность в машиностроении является исходным (первичным) геометрическим элементом в конструкции любой машины, формирующим остальные геометрические элементы: линии и точки пересечения, сопряжения поверхностей. Номинальные поверхности и их расположение в пространстве ограничивают номинальный объём деталей. Их можно условно разделить на основные и вспомогательные. Основные поверхности деталей машин

соприкасаются друг с другом и взаимодействуют с окружающей средой. Вспомогательные – фаски и скругления на границах пересечения основных поверхностей – необходимы для облегчения процессов сборки или являются следствием способа изготовления заготовок (литьё, объёмная штамповка). Подавляющее большинство прочностных расчётов проводится по номинальным поверхностям номинальной геометрии детали.

### **1.1. Состав параметров, определяющих форму, величину, размер и расположение номинальной поверхности**

Геометрическими параметрами номинальной поверхности являются параметры, определяющие форму и величину номинальной поверхности в собственной системе координат, а также параметры расположения собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат проекта.

Классифицировать формы поверхностей деталей можно по разным признакам. Наиболее общими признаками (свойствами) поверхностей являются:

- кривизна (подавляющее большинство поверхностей имеет кривизну, отличную от нуля, и только одна – плоскость – не имеет кривизны);
- симметрия (поверхности могут быть несимметричными – их большинство – и симметричными – с осевой или центральной симметрией);

Поверхность без кривизны одна – плоскость. Геометрические параметры формы номинальной поверхности с кривизной определяются координатами точек поверхностей в собственной системе координат номинальной поверхности. В зависимости от способа образования поверхности кинематического или каркасного (линейного или точечного) с последующим двумерным интерполированием формы номинальной поверхности [2] большинство возможных форм номинальных поверхностей общего вида не имеет наименований. Некоторые формы поверхностей имеют определённые названия. Примерами поверхностей с кривизной могут быть: цилиндрические, конические, параболические, гиперболические, спиральные, торовые и т.д.

Геометрические параметры формы и величины номинальных поверхностей, определяемые *характерными размерами*<sup>22</sup> длин и углов, единственные, поскольку номинальная величина поверхностей детали и её размеры заданы в технической документации и не могут быть ни больше, ни меньше.

Геометрические параметры, определяющие расположение собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат проекта также единственные. Они определяются в системе координат проекта координатами  $R_n$  точки  $O_n$  начала и матрицей  $A_n$  положения осей  $X_n, Y_n, Z_n$  собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат проекта. Направления двух осей собственной системы координат номинальной поверхности могут быть заданы углами в системе координат проекта. Направление третьей оси собственной системы координат номинальной поверхности определяется из условия ортогональности трёх координатных осей.

### **1.2. Состав параметров, определяющих форму, величину, размер и расположение реальной поверхности**

Реальные поверхности деталей машин ограничивают реальный объем деталей. Они имеют отклонения формы, обусловленные волнистостью и шероховатостью вследствие применяемых технологий изготовления и СТО. Величина и расположение в пространстве отличаются от номинальных, представленных в системе координат проекта. Геометрические параметры формы, величины и распо-

---

<sup>22</sup>*Характерный размер поверхности* – обобщённый термин, под которым в зависимости от соответствующих условий может пониматься любой из размеров поверхности, характеризующий её форму и величину, например, диаметр для цилиндрической и сферической поверхностей.

ложения реальных поверхностей детали, представленных в системе координат системы измерения, отличаются от аналогичных номинальных параметров номинальных поверхностей детали. Реальные поверхности соприкасаются друг с другом и с окружающей средой. По реальным поверхностям происходит сопряжение при сборке деталей. Прочностные расчёты могут в дальнейшем проводиться и по реальным поверхностям. Также как и в номинальной геометрии детали, часть реальных поверхностей детали носит вспомогательный характер (фаски и скругления на границах пересечения основных поверхностей).

Возникают вопросы:

- Чем реальная геометрия детали отличается от номинальной геометрии?
- Что выбрать за начало отсчета, от которого вычисляются отклонения формы реальной поверхности?
- Каким образом обеспечить однозначное определение отклонения геометрии поверхности?
- Как построить собственные системы координат номинальной и реальной поверхностей, ограничивающих объём детали?
- Как определить численные значения характерных параметров отклонения формы, размеров и взаимного расположения реальных поверхностей детали?

Поставленные вопросы требуют решения ряда задач, позволяющих формализовать представления о реальных поверхностях изделий. Оно должно осуществляться в соответствии со следующими принципами:

- суждение о величине, форме и положении реальных элементов формируется по результатам измерения в системе координат системы измерения;
- оценка отклонения формы и расположения элементов определяются по сравнению с их номинальной величиной и номинальным расположением в проекте технической документации;
- оценка должна определяться по одинаковому для всех элементов алгоритму и быть пригодной для элементов (линий, поверхностей) любой формы и величины;
- что выбрать за начало отсчета, от которого вычисляются отклонения расположения реальной поверхности?

Попытаться ответить на эти вопросы можно только после определения координат точек всех реальных поверхностей детали в системе координат системы измерения с помощью координатно-измерительных машин (КИМ).

Отличие реальной геометрии поверхностей детали от номинальной геометрии состоит в *отклонении формы, величины и расположения реальных поверхностей детали от формы, величины и расположения номинальных поверхностей*.

Отклонения формы, величины и расположения реальных поверхностей детали в системе координат системы измерения и отличие их от аналогичных свойств номинальных поверхностей детали в системе координат проекта определяется с помощью *отсчётных поверхностей*<sup>23</sup> [3, 4]. В [2] в качестве отсчётной поверхности используется *прилегающая поверхность*<sup>24</sup>, формальное представление о которой представлено отклонением точек реального элемента (линии или поверхности) от прилегающего элемента, формально представленное уравнением ( $\epsilon_{\max} \rightarrow \min$ ). В [3] доказано, что это не обеспечивает однозначного определения расположения номинальной поверхности в системе координат системы измерения среди измеренных точек реальной поверхности и определения отклонения формы реальной поверхности от номинальной поверхности. В качестве

---

<sup>23</sup> *Отсчётная поверхность* – поверхность, служащая для оценки отклонений точек реальной поверхности по нормали к отсчётной поверхности.

<sup>24</sup> *Прилегающая поверхность* – поверхность, имеющая форму номинальной поверхности, соприкасающаяся с реальной поверхностью и расположенная вне материала детали так, чтобы отклонение от нее наиболее удаленной точки реальной поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение.

отсчётной поверхности используется *номинальная поверхность*<sup>25</sup> и отклонение формы реального элемента определяется как отклонение точек реальной геометрии элемента от номинальной геометрии, определяемое по нормали к номинальному элементу в пределах нормируемого участка.

Адекватную и однозначную оценку отклонения формы реальной поверхности осуществляют с помощью номинальных отсчётных поверхностей, расположенных *среди точек реальных поверхностей* по условию  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$ , характерному для *средних поверхностей*<sup>26</sup> [2]. *Отсчётной средней поверхностью* для определения отклонения точек реальной поверхности в этом случае будем считать *номинальную поверхность*.

Поиск расположения среднего элемента (поверхности) и его системы координат среди измеренных точек, принадлежащих реальной поверхности детали, сводится к перемещению и повороту собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения, обеспечивающее минимум суммы квадратов отклонения точек реальной геометрии от номинальной геометрии. Он аналогичен поиску параметров *ортогональной регрессии* [4, 5] к поверхности, имеющей номинальную форму.

Найденное положение собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения при условии, что величина реальной поверхности равна величине номинальной поверхности позволяет одновременно определить:

- отклонение точек реальной поверхности от номинальной;
- расположение системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения, определяющее собственную систему координат реальной поверхности.

Способ формирования *отсчётной поверхности* для элементов с кривизной отличается от аналогичного способа для элементов без кривизны (плоскости), а способ привязки собственной системы координат к элементам с кривизной зависит от симметрии (осевой или центральной).

Для несимметричных поверхностей с кривизной правило «средних элементов» справедливо только тогда, когда *форма* и *величина* номинальной геометрии элемента и реального элемента, «похожего» на номинальный элемент совпадают. Только в этом случае система координат реальной поверхности, «похожей» на номинальную поверхность совпадёт с *собственной системой координат* номинальной поверхности.

Если сумма квадратов расстояний между точками реальной и номинальной поверхностями, имеющими одинаковую величину, будет иметь минимальное значение, то расположение системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения, будет соответствовать положению, позволяющему определять отклонения точек реальной поверхности от номинальной поверхности, что соответствует определению отклонения формы реальной поверхности [2].

Когда величина реального элемента (поверхности) больше или меньше номинального элемента с кривизной, необходимо сохранить найденное положение системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения для определения отклонения точек реальной поверхности от номинальной поверхности для оценки отклонения формы при изменении величины реальной поверхности.

Расположение *собственной системы координат номинального* элемента при поиске параметров *ортогональной регрессии* может отличаться от его расположения, соответствующего совпадению *формы* и *величины* номинальной геометрии элемента и реального элемента, «похожего» на номинальный элемент. Найденное положение системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения, необходимое для определения отклонения формы при

<sup>25</sup>*Номинальная поверхность* – идеальная поверхность, номинальная форма которой задана чертежом или другой технической документацией.

<sup>26</sup>*Средняя поверхность* – поверхность, имеющая номинальную форму и такие размеры и/или расположение, чтобы сумма квадратов расстояний между реальной и средней поверхностью в пределах нормируемого участка имела минимальное значение.

изменении величины реальной поверхности, можно сохранить только для *эквилистанты*<sup>27</sup> к номинальной поверхности или изменённого масштаба номинальной поверхности в собственной системе координат номинальной поверхности.

Неопределённость термина *форма элемента* допускает такую замену для номинальной формы элемента. Системы координат *эквилистанты* к номинальной поверхности в системе координат проекта номинальной поверхности и поверхности изменённого масштаба в собственной системе координат номинального элемента совпадают с собственной системой координат номинальной поверхности.

Для *эквилистанты* сумма квадратов расстояний между реальным и *отсчётным* (средним) элементами имела **наименьшее из возможных минимальных значений** в пределах нормируемого участка. Такая *эквилистанта* в собственной системе координат элемента (поверхности) является **отсчётной *эквилистантой***. *Отсчётная *эквилистанта** привязывает *собственную систему координат реального элемента* к *системе координат системы измерения*. Расположение системы координат реальной поверхности, по форме «похожей» на несимметричную поверхность с кривизной, в системе координат системы измерения соответствует расположению системы координат *отсчётной *эквилистанты** к номинальной поверхности, совпадающей с собственной системой координат несимметричной номинальной поверхности [5].

Для масштабируемой номинальной поверхности сумма квадратов расстояний между реальным и *отсчётным* (средним) элементами имеет **наименьшее из возможных минимальных значений** в пределах нормируемого участка. Такая масштабируемая номинальная поверхность в собственной системе координат элемента (поверхности) является **отсчётной *ортогональной поверхностью***. *Отсчётная *ортогональная поверхность** привязывает *собственную систему координат реального элемента* к *системе координат системы измерения*. Расположение системы координат реальной поверхности, по форме «похожей» на несимметричную поверхность с кривизной, в системе координат системы измерения соответствует расположению системы координат *отсчётной *ортогональной поверхности** к номинальной поверхности, совпадающей с собственной системой координат несимметричной номинальной поверхности.

Оба способа определения положения собственной системы координат реальной поверхности формально равноценны. Изменяя направление формирования *эквилистанты* относительно номинальной несимметричной поверхности (по одну или другую сторону от поверхности) и величину смещения  $\varepsilon$  относительно исходной номинальной несимметричной поверхности можно подобрать их такими, чтобы после поворота и перемещения собственной системы координат сформированной *отсчётной поверхности* в системе координат системы измерения, был обеспечен минимум суммы квадратов отклонения точек реальной поверхности от *отсчётной*. Форма *отсчётной *эквилистанты** требует достаточно громоздкой процедуры построения *эквилистанты* и приводит к большим отличиям формы поверхности при больших  $\varepsilon$ , а форма определения *отсчётной *ортогональной поверхности** – положения начала системы координат номинальной несимметричной поверхности для масштабирования и масштаба при сохранении масштабируемых параметров, что предпочтительнее.

Именно *отсчётная *ортогональная поверхность** определяет величину реальной поверхности и обеспечивает привязку собственной системы координат номинальной поверхности к системе координат системы измерения.

Посмотрим, как это можно сделать.

Пусть на номинальной геометрии несимметричной поверхности с кривизной определены координаты трёх *характерных точек* (реперов), разнесённых возможно дальше друг от друга и лежащих на номинальной поверхности. Одним из требований, предъявляемых к расположению этих *характерных точек*, является недопустимость их расположения на одной прямой. Это точки могут быть пересечением трёх номинальных поверхностей в системе координат проекта.

---

<sup>27</sup>*Эквилистанта* – геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой фиксированной кривой или поверхности.



Измерим реальную поверхность детали и *характерные точки*, принадлежащие этой поверхности в системе координат системы измерения. Если расстояния между одноимёнными характерными точками будут равны, то *величина* реального элемента равна *величине* номинального элемента. Если расстояния между одноимёнными характерными точками не будут равны, то *величина* реального элемента будет больше или меньше *величины* номинального элемента. Следовательно, необходимо найти (определить) положение собственной системы координат номинального элемента с кривизной любой *величины*, в системе координат проекта.

Если подобрать величину *отсчётной поверхности*, сохранив форму и собственную систему координат номинального элемента, то получим искомое положение собственной системы координат номинальной поверхности в системе координат системы измерения, позволяющее определить отклонение точек реальной поверхности от номинальной и, следовательно, отклонение формы.

Для точек реальной поверхности отклонение их от номинальной поверхности по нормали к номинальной поверхности, характеризует отклонение (погрешность) формы *реальной поверхности* от формы номинальной поверхности.

*Отклонение величины реальной поверхности* от номинальной геометрии поверхности определяется расстоянием  $\varepsilon$  между *отсчётной эквидистантой* или *отчётной ортогональной поверхностью* и *номинальной геометрией поверхности*. Если для поверхности с кривизной смещение  $\varepsilon$  направлено наружу к большей кривизне, то это свидетельствует о величине *отчётной эквидистанты* большей, чем величина номинальной поверхности. Если для такой же поверхности смещение  $\varepsilon$  направлено внутрь, то величина *отчётной эквидистанты* меньше, чем величина номинальной поверхности.

Для привязки собственной системы координат *осесимметричных элементов* к массиву измеренных точек, соответствующих реальному элементу, «похожему» на номинальный элемент в системе координат системы измерения необходимо определить направление оси элемента (поверхности) и координаты двух точек:

- точки, через которую проходит ось симметрии элемента,
- точки (репера), лежащей на элементе (поверхности), как в собственной системе координат, так и в системе координат системы измерения.

Вычисленные направление оси и координаты точки, через которую проходит ось осесимметричного элемента, определённые на номинальной поверхности осесимметричного элемента и измеренные на реальной поверхности детали координаты одной точки (репера) позволят построить собственную систему координат номинального элемента в системе координат проекта и реального элементов в системе координат системы измерения.

Для привязки собственной системы координат к элементам с *центральной симметрией* необходимо и достаточно координат трёх точек:

- вычисленных координат точки центра;
- измеренных двух точек (реперов), удалённых друг от друга, координаты которых определены в собственной системе координат элемента и измерены в системе координат системы измерения. Эти три точки также позволяют определить собственные системы координат номинального и реального элементов.

Для поверхностей без кривизны (плоскостей) правило «средних элементов» выполняется всегда. *Отсчётной поверхностью* для определения отклонений точек реальной поверхности будет *плоскость ортогональной регрессии* [2, 3], построенной на измеренных точках, принадлежащих реальной поверхности, «похожей на плоскость».

Привязать собственную систему координат реального элемента к массиву измеренных точек, соответствующих реальному элементу, «похожему» на плоскость, можно по вычисленному *направлению нормали к плоскости ортогональной регрессии* и координатам двух точек (реперов). Координаты первой точки находятся на плоскости ортогональной регрессии. Они определяются как центр тяжести измеренных точек элемента, «похожего» на плоскость, имеющих единичную массу. Координаты второй точки определены в собственной системе координат номинального элемента и измерены в системе координат системы измерения. Эти элементы позволяют построить собственную

систему координат номинального элемента в системе координат проекта и реального элементов в системе координат системы измерения.

Расположения реальной поверхности в системе координат системы измерения определяются координатами  $X_p, Y_p, Z_p$  точки  $O_p$  начала системы координат *отсчётной поверхности* и матрицей  $A_p$  положения осей собственной системы координат реальной поверхности. Направления двух осей системы координат реальной поверхности могут быть заданы углами в системе координат системы измерения. Направление третьей оси собственной системы координат реальной поверхности в системе координат системы измерения определяется из условия ортогональности.

Геометрические параметры, определяющие расположение реальной поверхности в системе координат системы измерения, отличаются от геометрических параметров расположения номинальной поверхности в системе координат проекта (см. п. 1.1.).

Для того, чтобы сравнить отклонение (разницу) расположения систем координат номинальных и реальных поверхностей необходимо их оценивать в одинаковой системе координат, приемлемой для обеих систем координат (проекта и системы измерения). Такой системой координат будет *система координат базы*<sup>28</sup>, одинаковой для систем координат проекта и системы координат системы измерения.

Если к *отсчётным эквидистантам* и *плоскостям ортогональной регрессии* построить эквидистанты нижней и верхней границ отклонения формы, то эквидистанты границ, которым соответствует максимум материала детали, определяют *эквивалентные поверхности* и *эквивалентный объём*, величина которого не превосходит реальной поверхности детали. Эти границы будем считать *границами реальной геометрии детали*. По этим границам определяются реальные размеры геометрических параметров реальной детали: длин, диаметров, углов.

Отклонения (погрешности) размеров, а также формы и расположения *реальной геометрии* множества реальных *поверхностей*, ограничивающих объём детали, от *номинальной геометрии* определяют в системе координат системы измерения *по эквивалентам к реальным поверхностям*, которым соответствует максимум материала детали.

## 2. Пример

Рассмотрим простейший пример детали, в котором будут представлены все виды поверхностей: осесимметричные, с кривизной и без. Таким простейшим примером детали будет объемлемая<sup>29</sup> деталь – вал<sup>30</sup>, номинальный объём которого ограничен цилиндрической поверхностью и двумя торцовыми плоскостями (рис. 2).

---

<sup>28</sup>*База* – обобщённый термин, под которым в зависимости от соответствующих условий может пониматься любая из систем координат, в которой определены координаты элементов. Относительное расположение систем координат элементов друг к другу определяется, когда за *базу* принимается система координат одного из элементов или любая другая выбранная система координат.

<sup>29</sup>*Объемлемый* – обнимаемый, охватываемый, заключающийся в чем-нибудь.

<sup>30</sup>*Вал* – термин, условно применяемый для обозначений наружных (объемлемых) элементов деталей, включая и нецилиндрические элементы.

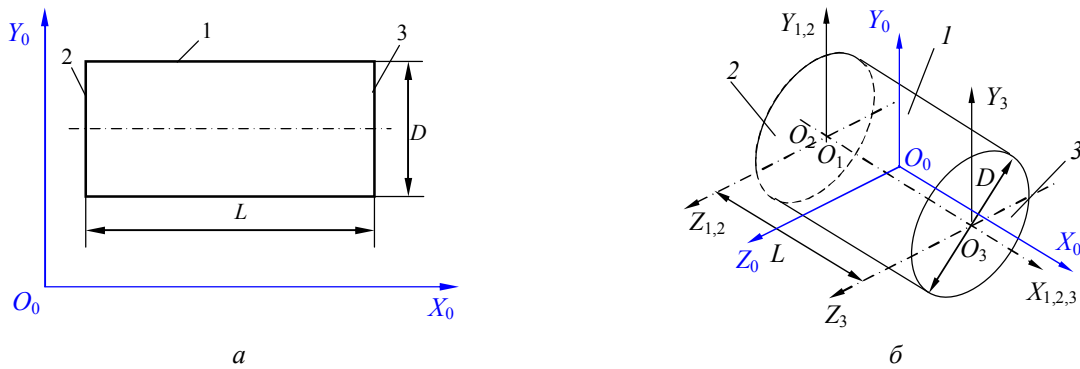


Рис. 2. Деталь в номинальной системе координат: а – проекция детали на плоском чертёже, б – изображение той же детали в пространстве

Изготовление вала по номинальному чертежу или номинальной 3D модели из выбранной заготовки по выбранной технологии выбранными средствами технологического оснащения (СТО) и даст объект с реальными поверхностями (рис. 3).

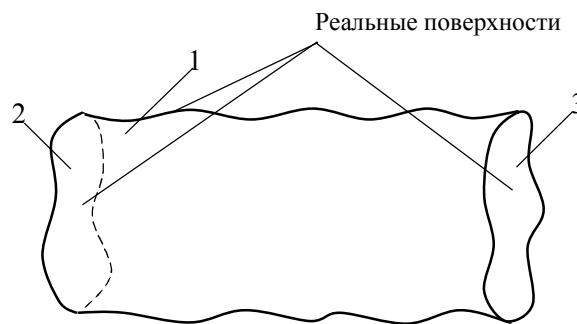


Рис. 3. Вид реальных поверхностей детали после изготовления

Геометрия измеренных элементов отличается от номинальной геометрии.

Возникают вопросы: где ось цилиндра? Каков его диаметр? Чему равна длина детали? От какого уровня производить определение отклонения формы? и т. д.

Отличие реальной геометрии от номинальной геометрии состоит в отличии (*отклонении*) величины, формы реальных поверхностей от величины, формы номинальных поверхностей и отклонении расположения реальных поверхностей от расположения номинальных поверхностей в системе координат базы.

**Отклонение формы реальной поверхности** определяется как отклонение точек реальной геометрии поверхности от её номинальной геометрии по нормали к номинальной геометрии поверхности в пределах нормируемого участка.

Сначала определим в системе координат системы измерения с помощью современных координатно-измерительных машин (КИМ) координаты множества («облака») точек реальных поверхностей. После измерения и пересчёта в систему координат системы измерения определены координаты  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  точек реальных поверхностей детали. Здесь индекс  $i$  – номер точки на  $j$ -той поверхности ( $i = 1 \dots n; j = 1 \dots m$ ) (рис. 4).

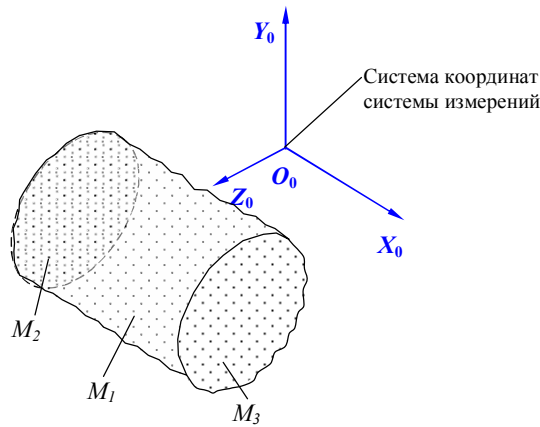


Рис. 4. Точки реальных поверхностей вала в системе координат системы измерения КИМ

Поверхностей всего три: два торца, «похожие на плоскости» и одна боковая, «похожая на цилиндр». Координаты точек реальных поверхностей цилиндрической детали в системе координат системы измерения можно представить массивами  $M_1, M_2, M_3$  значений координат точек каждой из реальных поверхностей.

Нам не известны: ни величина, ни форма, ни расположение поверхностей, получившихся после изготовления. Кроме того требуется определить отклонения формы и расположения реальных поверхностей от их отсчётных номинальных значений, заданных в системе координат проекта.

Начнём с параметров отклонения формы и величины реальной цилиндрической поверхности, характеризуемой массивом координат  $M_1$ .

В нашей задаче (рис. 2, б) для номинальной цилиндрической поверхности, имеющей кривизну, необходимо отметить в системе координат проекта и определить в системе координат системы измерения координаты трёх *характерных точек* (реперов). Они должны принадлежать поверхности, должны быть разнесены достаточно далеко друг от друга и не лежать на одной прямой. В системе координат проекта номинальной цилиндрической (искривлённой) поверхности детали  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  определим координаты трёх удалённых точек  $1', 2'$  и  $3'$ :  $x_1', y_1', z_1'$ ;  $x_2', y_2', z_2'$  и  $x_3', y_3', z_3'$  (рис. 5, а).

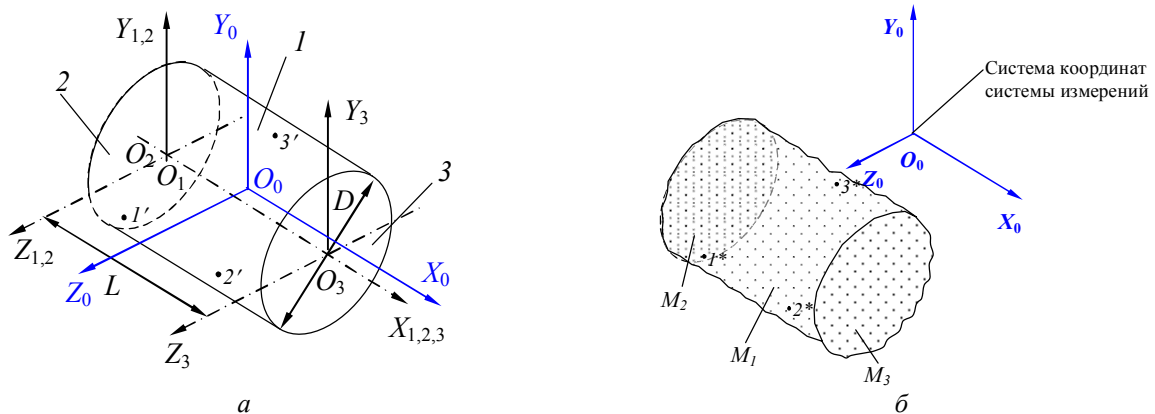


Рис. 5: а – нанесение реперов на номинальную поверхность; б – измерение координат реперов на реальной поверхности

Вспользуемся координатно-измерительной машиной (КИМ) и измерим в её системе координат множества точек каждой из поверхностей цилиндрической детали, в том числе и отмеченные *характерные точки*, получившие в системе координат системы измерения значения  $x_1^*, y_1^*, z_1^*, x_2^*, y_2^*, z_2^*$  и  $x_3^*, y_3^*, z_3^*$  (рис. 5, б).

Сравним расстояния между точками  $1', 2'$  и  $3'$  в системе координат проекта (рис. 5, а) с расстоянием между точками  $1^*, 2^*$  и  $3^*$  в системе координат системы измерения (рис. 5, б).

Если эти расстояния одинаковы, то совместим *характерные точки* номинальной поверхности с одноимёнными *характерными точками* реальной поверхности. Это равносильно тому, что в массив

точек  $M_1$  впишем бесконечно длинный цилиндр номинального диаметра методом минимума суммы квадратов отклонений реальной поверхности от номинальной. В результате такой процедуры совмещения привяжем номинальную систему координат к системе координат системы измерения, а с ней и номинальную поверхность, для определения отклонений формы. По *характерным точкам* определим положение направление (положение) оси номинального цилиндра в пространстве координат системы измерения (рис. 6, а).

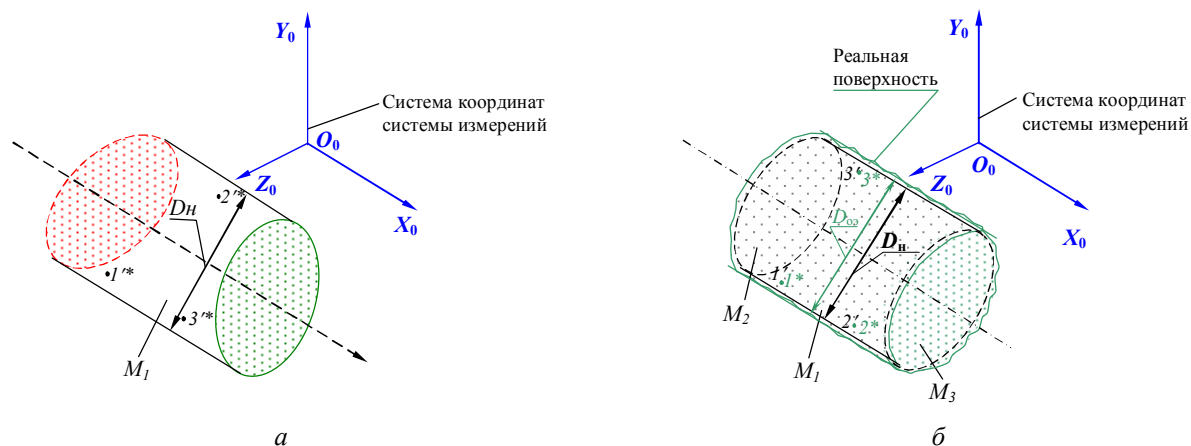


Рис. 6. Характерные точки на номинальной и реальной геометрии поверхности, «похожей» на цилиндр

Если расстояния между *одноимёнными характерными точками* реального цилиндра и номинального не одинаковы, то *величина* реальной поверхности, «похожей» на цилиндр либо больше, либо меньше *величины* номинального цилиндра, а нам необходимо так расположить номинальную поверхность, чтобы отклонение точек реальной поверхности отсчитывалось от номинальной поверхности.

Сформируем к номинальной цилиндрической поверхности эквидистанту и, изменяя направление формирования эквидистанты относительно номинальной несимметричной поверхности (по одну или другую сторону от поверхности), а также величину смещения  $\varepsilon$  относительно исходного несимметричного элемента, подберём их такими, чтобы расстояния между *одноимёнными характерными точками*, перенесёнными с номинальной поверхности на эквидистанту и измеренными точками, стали одинаковыми. Такая эквидистанта будет *отсчётной эквидистантой*. Подобранная *отсчётная эквидистанта* определяет положение оси номинального цилиндра, опираясь на точки, принадлежащие реальной поверхности (рис. 6, б). В этом случае достигаем искомого положения номинальной геометрии в системе координат системы измерения и отклонение точек реальной поверхности отсчитываем от номинальной поверхности.

Эту же операцию можно сделать и подбирая масштаб номинальной поверхности. Подберём его таким, чтобы расстояния между *одноимёнными характерными точками*, перенесёнными с номинальной поверхности на *отсчётную ортогональную поверхность* и измеренными точками, стали одинаковыми. Подобранная *отсчётная ортогональная поверхность* определяет положение оси номинального цилиндра, опираясь на точки, принадлежащие реальной поверхности (рис. 6, б). В этом случае достигаем искомого положения номинальной геометрии в системе координат системы измерения и отклонение точек реальной поверхности отсчитываем от номинальной поверхности.

Продолжим с «вписывание» в массивы точек  $M_2$  и  $M_3$  не ограниченных по размерам плоскостей. Плоскость отличается отсутствием кривизны. Координаты точки, через которую проходит плоскость, определяется как центр тяжести облака измеренных точек, имеющих единичную массу, а направление нормали определяется по результатам определения положения *плоскости ортогональной регрессии*. Вычислим координаты произвольных точек, принадлежащих каждой плоскости, и направление их нормалей  $n_2$  и  $n_3$  в системе координат системы измерения (рис. 7).

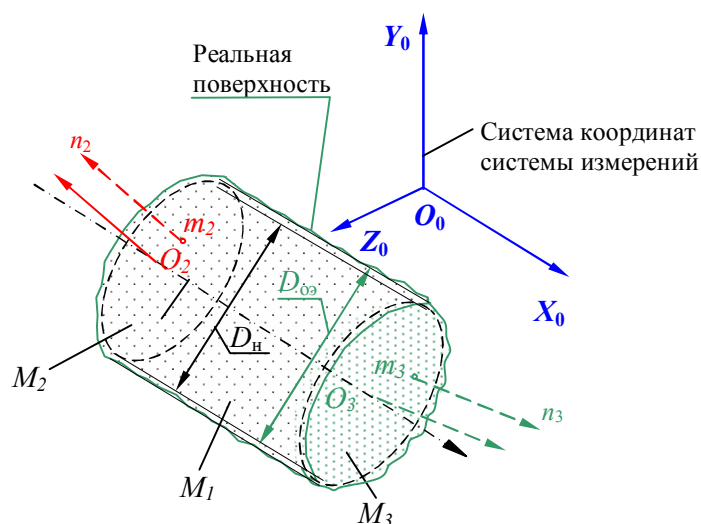


Рис. 7. Определение расположения нормалей к торцовым поверхностям, «похожим» на плоскости

К *отсчётной эквидистанте* цилиндра и *плоскостям ортогональной регрессии* построим эквидистанты нижней и верхней границ отклонения формы.

Эквидистанты границ, которым соответствует максимум материала детали, определяют объём, величина которого не превосходит реальной поверхности детали. Эти границы будем считать границами детали, положение которых определяют отклонения расположения реальных поверхностей.

Перенесём нормали к *плоскостям ортогональной регрессии* в точки  $O_2$  и  $O_3$  пересечения оси *отсчётной эквидистанты* с плоскостями, соответствующими границам максимума материала детали торцов (рис. 7) и тем самым завершим определение геометрических параметров расположения *отсчётных поверхностей* всех трёх поверхностей вала в системе координат системы измерения.

Расположение номинальных элементов детали определяется номинальными линейными и угловыми размерами между собственными системами координат рассматриваемых элементов в системе координат проекта.

Расположение реальных элементов детали по отношению друг к другу можно определить по расположению систем координат реальных элементов в системе координат системы измерения.

**Отклонение расположения систем координат реальных элементов** определяется в системе координат, принятой за базу в системах координат проекта и системы измерения, по отличию расположения систем координат их реальных элементов от расположения систем координат номинальных элементов.

Откуда это можно узнать? Только после измерения координат точек поверхностей в системе координат системы измерения и привязки к реальной геометрии систем координат номинальных элементов.

Манипулирование системой координат эквидистантного элемента, привязанного к номинальной системе координат геометрии реального элемента в системе координат системы измерения возможно только при однозначной привязке номинальной геометрии элемента к номинальной системе координат. Она всегда выполняется для *несимметричных элементов*.

Для пространственных (3D) элементов с осевой симметрией необходимо указывать (координировать) две точки (два репера) на номинальном и реальном элементах, которые предотвращают возможный произвольный поворот *отсчётного эквидистантного элемента* вокруг центра симметрии, приводящий к неопределённости положения номинальной системы координат по отношению к геометрии реального элемента (точки  $k_1, k_2, k_3$ ).

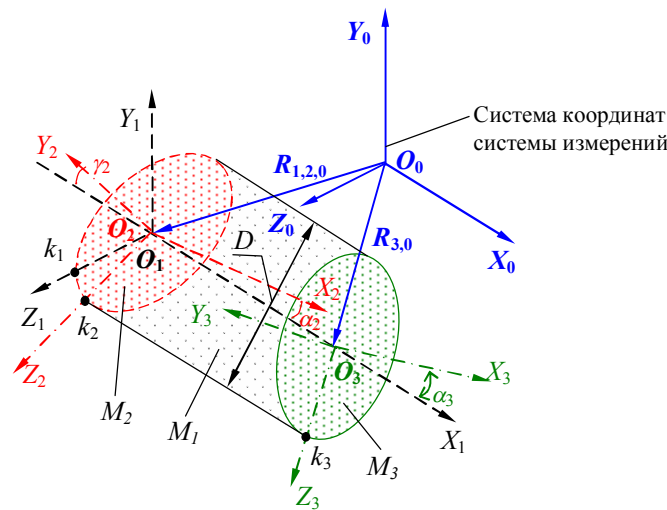


Рис. 8. Привязка систем координат к базовым отсчётным элементам с осевой симметрией и плоскостям с центральной симметрией

На рис. 8 представлено формирование систем координат отсчётных поверхностей осесимметричного элемента конструкции, ограниченного боковой реальной поверхностью, «похожей на цилиндр» 1 и двумя торцовыми поверхностями 2 и 3, «похожими на плоскости». Отсчётной поверхностью для реальной поверхности «похожей на цилиндр» является *отсчётная эквидистанта* к номинальной поверхности с кривизной, а отсчётными поверхностями для реальных поверхностей торцов, «похожих на плоскости» являются *плоскости ортогональной регрессии*.

К *отсчётной эквидистанте* цилиндра и *плоскостям ортогональной регрессии* построим эквидистанты нижней и верхней границ отклонения формы.

Эквидистанты границ, которым соответствует максимум материала детали, определяют объём, величина которого не превосходит реальной поверхности детали. Эти границы будем считать границами детали, положение которых определяют отклонения расположения реальных поверхностей.

Изложенные представления о реальной геометрии детали привели нас снова к некоторому подобию *прилегающих базовых отсчётных элементов* [2], но определённым по другим правилам. Эти правила обусловлены тем, что привязку системы координат номинальных поверхностей к геометрии (облакам точек) реальных поверхностей в системе координат системы измерения осуществляют через *отсчётную эквидистанту* к номинальному цилиндру в номинальной системе координат и *плоскостям ортогональной регрессии* для поверхностей, «похожих на плоскость».

Для того чтобы исключить путаницу в терминах, введем новые понятия:

- **эквивалентными поверхностями** будем считать поверхности эквидистант к реальной геометрии, охватывающие тело по предельным отклонениям реальных поверхностей: для реальной поверхности, «похожей на цилиндр», имеющей диаметры: снаружи  $D_{\text{ЭКВ}}^{B+}$  и внутри  $D_{\text{ЭКВ}}^{B-}$ , а также реальным поверхностям «похожим на плоскость», параллельные к *плоскостям ортогональной регрессии*, имеющим отклонения снаружи  $H_{\text{ЭКВ}}^{B+}$  и внутри  $H_{\text{ЭКВ}}^{B-}$ ;
- **отклонением точки реальной боковой поверхности вала от номинальной поверхности** будем считать  $\Delta R_{\text{Т}}^{\text{бп}}$  – расстояние от точки реальной поверхности, «похожей на цилиндр» до номинального цилиндра по нормали к номинальной геометрии;
- **отклонением формы реальной боковой поверхности вала от номинальной поверхности** будем считать  $\Delta R_{\text{Ф}}^{\text{бп}}$  – расстояние от эквивалентной поверхности, которому соответствует максимум материала детали до номинального цилиндра по нормали к номинальной геометрии;
- **эквивалентным диаметром вала** будем считать диаметр  $D_{\text{ЭКВ}}^{B+}$  эквивалентной поверхности;



- **отклонением точек торцевых поверхностей вала от номинальных поверхностей** будем считать  $\Delta R_T^{тп}$  – расстояния от точек реальных поверхностей торцов «похожих на плоскость» до плоскостей *ортогональной регрессии* в системе координат системы измерения по нормали к ним.
- **отклонением формы торцевых поверхностей вала от номинальных поверхностей** будем считать  $\Delta R_\phi^{тп}$  – расстояния от эквивалентных поверхностей, которым соответствует максимум материала детали до плоскостей *ортогональной регрессии* в системе координат системы измерения.
- **эквивалентной длиной вала** будем считать длину расстояния  $L_p$  между точками  $O_2$  и  $O_3$ , соответствующее точкам пересечения оси номинального цилиндра с эквивалентными поверхностями торцов, обеспечивающими наибольший объём материала детали.

Следует заметить, что способ определения отклонения формы для поверхностей с кривизной отличается от способа определения отклонение формы для поверхности для поверхности без кривизны (плоскости). Первый определяется от номинальной поверхности, заданной в системе координат проекта, а второй от *плоскости ортогональной регрессии*, заданной в системе координат системы измерения

Расстояние между эквидистантами к реальным поверхностям, параллельным отсчётной эквидистанте и плоскости ортогональной регрессии, ограничивающими наибольший и наименьший объёмы материала детали будем считать отклонением формы, обусловленными волнистостью<sup>31</sup> и шероховатостью<sup>32</sup> поверхностей.

Если за базу в системах координат проекта и системы измерения принята система координат цилиндра то на рис. 9 представлена 2D проекция, где условно изображены все отклонения формы и расположения реальных торцевых поверхностей в предложенных терминах.

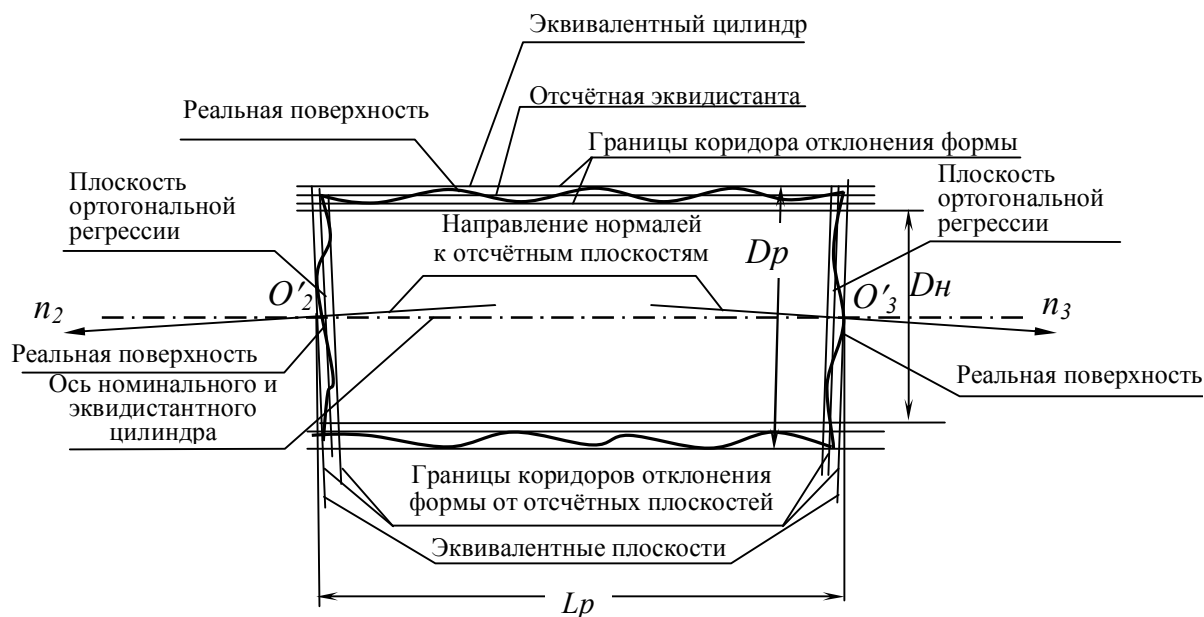


Рис. 9. Геометрические параметры реальной геометрии вала

Рисунок 9 позволяет дать все ответы на вопросы о параметрах реальной геометрии.

<sup>31</sup> *Волнистость* – совокупность периодически повторяющихся неровностей, у которых расстояния между смежными возвышенностями или впадинами превышают базовую длину для имеющейся шероховатости поверхности.

<sup>32</sup> *Шероховатость* – совокупность неровностей микрогеометрии с относительно малыми шагами на базовой длине.



Диаметр эквидистантного цилиндра, соответствующего наибольшему объёму материала будет искомым диаметром реального цилиндра  $D_p = D_{\text{экв}}^{B+}$ . Разница диаметров номинального и реального цилиндров будет погрешностью формы боковой поверхности детали.

Углы между направлением оси цилиндра и нормальными к эквивалентным поверхностям реальных торцов, ограничивающих наибольший объем материала детали определяют погрешности расположения торцов вала по отношению к реальной оси поверхности «похожей на цилиндр».

Расположение номинальных элементов детали определяется номинальными линейными и угловыми размерами между собственными системами координат рассматриваемых элементов в системе координат проекта.

Расположение реальных элементов детали по отношению друг к другу можно определить по расположению систем координат реальных элементов в системе координат системы измерения.

Выбрав систему координат базы, определим положение системы координат каждого элемента в системе координат базы, как номинального в системе координат проекта, так и реального в системе координат системы измерения (рис. 9).

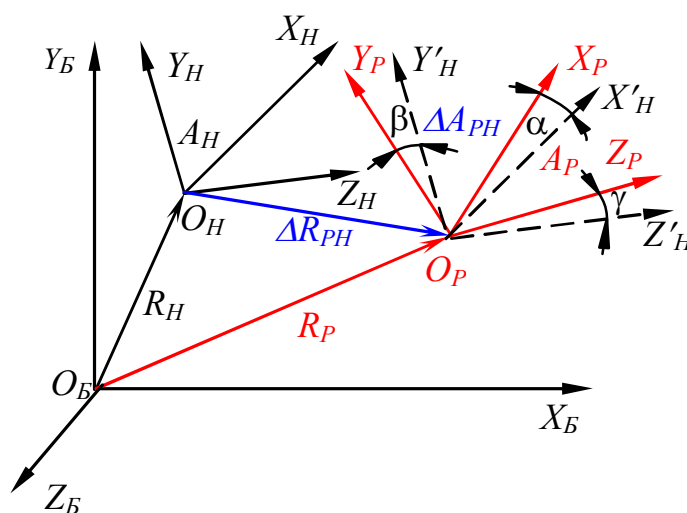


Рис. 10. Системы координат номинального и реального элементов в системе координат базы

На рис. 9 представлены:

- **номинальное расположение поверхности** – положение системы координат номинального элемента в системе координат базы определяется вектором положения начала системы координат  $R_H$  и матрицей  $A_H$  направляющих косинусов элемента;
- **реальное расположение поверхности** – положение системы координат реального элемента в системе координат же базы определяется вектором положения начала системы координат  $R_P$  и матрицей  $A_P$  направляющих косинусов.

Для каждого элемента в системе координат базы, одинаковой для системы координат проекта и системы координат системы измерения определим расположение реального элемента относительно номинального [3]. Он будет сдвинут и повернут относительно номинального элемента.

Расположение реальной поверхности в системе координат базы можно представить как сумму расположения номинальной поверхности, представляемой вектором  $R_H$  и матрицей  $A_H$  и погрешности расположения [5, 6], представляемой вектором  $\Delta R_{PH}$  и матрицей поворота  $\Delta A_{PH}$ :

$$\Delta R_{PH} = A_H^T \cdot (R_P - R_H); \Delta A_{PH} = A_H^T \cdot A_P,$$

где  $A_H^T$  – транспонированная матрица  $A_H$ .

Определение погрешности расположения реальных поверхностей детали в выбранной системе координат связано с векторно-матричным представлением положения системы координат в декартовой системе координат. Это удобно для вычислений, но неудобно для измерений. При измерениях определяют расстояния и углы, а в матричной форме применяют вычисляемые

направляющие косинусы. Для перехода от измеряемых параметров к параметрам матриц и обратно необходимы соотношения для пересчёта.

Положение точки начала отсчета  $O_H$  номинальной системы координат  $O_H X_H Y_H Z_H$  в системе координат базы  $O_B X_B Y_B Z_B$  задают вектором  $R_H$ . Положение точки начала отсчета  $O_P$  реальной системы координат  $O_P X_P Y_P Z_P$  в системе координат базы  $O_B X_B Y_B Z_B$  задают вектором  $R_P$ .

**Отклонение расположения**  $\Delta R_{PH}$  определяется по отклонению расположения начала  $O_P$  системы координат реального рассматриваемого элемента от начала  $O_H$  системы координат номинального элемента в системе координат  $O_B X_B Y_B Z_B$ , принятой за базу в системах координат номинальной и реальной геометрии. Его вычисляют по формулам:

$$\Delta R_{PH} = \sqrt{(x_{Op} - x_{Oh})^2 + (y_{Op} - y_{Oh})^2 + (z_{Op} - z_{Oh})^2}$$

в направлении, определяемом направляющими косинусами  $l_{PH}, m_{PH}, n_{PH}$ ,

$$\text{где } l_{PH} = \frac{x_{Op} - x_{Oh}}{\sqrt{(x_{Op} - x_{Oh})^2 + (y_{Op} - y_{Oh})^2 + (z_{Op} - z_{Oh})^2}},$$

$$m_{PH} = \frac{y_{Op} - y_{Oh}}{\sqrt{(x_{Op} - x_{Oh})^2 + (y_{Op} - y_{Oh})^2 + (z_{Op} - z_{Oh})^2}},$$

$$n_{PH} = \frac{z_{Op} - z_{Oh}}{\sqrt{(x_{Op} - x_{Oh})^2 + (y_{Op} - y_{Oh})^2 + (z_{Op} - z_{Oh})^2}}.$$

**Поворот системы координат**  $O_P X_P Y_P Z_P$  относительно системы координат  $O_H X_H Y_H Z_H$ , определяется матрицей поворота  $\Delta A_{PH} = A_{PH}^T \cdot A_P$ ,

где

$$A_{PH}^T = \begin{bmatrix} l_{1H} & m_{1H} & n_{1H} \\ l_{2H} & m_{2H} & n_{2H} \\ l_{3H} & m_{3H} & n_{3H} \end{bmatrix} \text{ – транспонированная матрица;}$$

$$A_H = \begin{bmatrix} l_{1H} & l_{2H} & l_{3H} \\ m_{1H} & m_{2H} & m_{3H} \\ n_{1H} & n_{2H} & n_{3H} \end{bmatrix};$$

$$A_P = \begin{bmatrix} l_{1P} & l_{2P} & l_{3P} \\ m_{1P} & m_{2P} & m_{3P} \\ n_{1P} & n_{2P} & n_{3P} \end{bmatrix};$$

$$\Delta A_{PH} = \begin{bmatrix} l_{1H} & m_{1H} & n_{1H} \\ l_{2H} & m_{2H} & n_{2H} \\ l_{3H} & m_{3H} & n_{3H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{1P} & l_{2P} & l_{3P} \\ m_{1P} & m_{2P} & m_{3P} \\ n_{1P} & n_{2P} & n_{3P} \end{bmatrix}.$$

Произведение сцепленных матриц  $A$  и  $B$  вычисляем по формуле:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{откуда } \Delta A_{рн} = \begin{bmatrix} l_{1н}l_{1п} + m_{1н}m_{1п} + n_{1н}n_{1п} & l_{1н}l_{2п} + m_{1н}m_{2п} + n_{1н}n_{2п} & l_{1н}l_{3п} + m_{1н}m_{3п} + n_{1н}n_{3п} \\ l_{2п}l_{1п} + m_{2н}m_{1п} + n_{2н}n_{1п} & l_{2п}l_{2п} + m_{2н}m_{2п} + n_{2н}n_{2п} & l_{2п}l_{3п} + m_{2н}m_{3п} + n_{2н}n_{3п} \\ l_{3н}l_{1п} + m_{3н}m_{1п} + n_{3н}n_{1п} & l_{3н}l_{2п} + m_{3н}m_{2п} + n_{3н}n_{2п} & l_{3н}l_{3п} + m_{3н}m_{3п} + n_{3н}n_{3п} \end{bmatrix}.$$

**Поворот системы координат** можно представить двумя углами  $\alpha$  (угол между осью  $X_p$  и  $X'_н$ ) и  $\beta$  (угол между осью  $Y_p$  и  $Y'_н$ ). Третий угол между осью  $Z_p$  и  $Z'_0$  из-за ортогональности осей координат определяется автоматически.

Косинусы углов  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по формулам:

$$\cos \alpha = l_{1н}l_{1п} + m_{1н}m_{1п} + n_{1н}n_{1п}, \quad \cos \beta = l_{2п}l_{2п} + m_{2н}m_{2п} + n_{2н}n_{2п};$$

$$\text{Откуда } \alpha = \arccos l_{1н}l_{1п} + m_{1н}m_{1п} + n_{1н}n_{1п} \quad \text{и} \quad \beta = \arccos l_{2п}l_{2п} + m_{2н}m_{2п} + n_{2н}n_{2п}.$$

Приведенные уравнения позволяют вычислить отклонения формы и расположения реальных поверхностей «похожих» на плоскость и цилиндр.

### 3. Итоги проверенного исследования

Собственную систему координат номинального элемента можно однозначно привязать к реальной геометрии элемента в системе координат системы измерения по единому правилу *средних элементов*:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min,$$

где  $\varepsilon_i$  – расстояние от  $i$ -той точки реальной поверхности по нормали до базовой отсчётной поверхности.

Для элементов с кривизной, эта привязка осуществляется через *отсчётные эквидистанты*. Эквидистанты к номинальным элементам отличаются величиной и направлением смещения наружу или внутрь относительно элемента. Изменяя величину и направления смещений, перемещая и поворачивая эквидистанты со связанными с ними системами координат, определяем параметры *отсчётных эквидистант*, имеющих наименьшую сумму квадратов отклонений точек реальных поверхностей от *отсчётных эквидистант*. Положение номинальной поверхности в системе координат системы измерения обеспечивает возможность определения отклонений точек и формы реального элемента от номинального элемента, что и требуется в соответствии с определением отклонения формы.

Положение средней плоскости в системе координат системы измерения определяют методом поиска значений параметров *ортогональной регрессии*, обеспечивающих определение точки, через которую проходит средняя плоскость и направления нормали к этой плоскости.

В результате получим расположение систем координат реальных поверхностей в системе координат системы измерения.

Отклонение формы реальной поверхности определяется по смещению эквидистанты к номинальной поверхности, соответствующей наибольшему объёму материала.

Отклонение расположения определяется по величине смещения начала координат реальной поверхности в пределах некоторого объёма (три координаты в системе координат номинальной геометрии) и величине углов поворота системы координат реальной поверхности относительно системы координат номинальной геометрии (три угла поворота).

**Отклонение формы реальной поверхности** детали можно описать следующей совокупностью параметров.

Для поверхностей *любой формы с кривизной*:

- *первый* обусловлен эквидистантным смещением номинальной поверхности (номинального элемента);
- *второй* обусловлен искривлением номинальной поверхности (волнистость, шероховатость), зависящей от технологии формирования реальной поверхности.

Для поверхностей *без кривизны* (плоскости):

- *первый* определяет координаты точки через которую проходит плоскость *ортогональной средней квадратической регрессии*;
- *второй* определяет направление нормали к плоскости.

**Отклонение расположения реальной поверхности** в выбранной системе координат также имеет две составляющие:

*первая* – смещение начала координат реальной поверхности в пределах некоторого объёма (три координаты в системе координат номинальной геометрии);

*вторая* – поворот системы координат реальной поверхности относительно системы координат номинальной геометрии (три угла поворота).

Всего погрешность изготовления элементов в системе координат системы измерения описываются **семью независимыми и измеримыми параметрами**: эквидистантное смещение и отклонение формы (шероховатость, волнистость), три смещения и два угла поворота системы координат реального элемента в системе координат базы, одинаковой для реальной и номинальной геометрии элемента. При измерении углов поворота системы координат последующей (реальной) относительно предыдущей (номинальной) в УГП [6] число параметров независимых погрешностей возрастает до восьми

Изложенный подход обеспечивает удовлетворение всех заявленных принципов:

- суждение о величине, форме и положении реальных элементов формируется по результатам измерения в системе координат системы измерения;
- отклонения формы и расположения элементов определяются по сравнению с их номинальной величиной и номинальным расположением в проекте технической документации по одинаковым для элементов любой формы и величины алгоритмам;
- отклонение формы – после привязки системы координат номинальной геометрии к реальной по наименьшей из эквидистант к номинальной геометрии, для которой сумма квадратов отклонения точек реальной геометрии будет минимальной;
- отклонение расположения – по результату сравнения положения систем координат номинального и реального рассматриваемых элементов в системе координат элемента, принятого за базу, как в системе координат проекта, так и в системе координат системы измерения.

Для использования на практике разработанных теоретических предпосылок, позволяющих точно и адекватно обработать исходные данные, полученные в результате измерения реальной геометрии вала с помощью координатно-измерительной машины, необходимо решить следующие задачи:

- разработать алгоритмы и рабочие программы обработки измерительной информации для поверхностей «похожих» на плоскость и цилиндр;
- определить количество, равномерность распределения и точность измерения координат контролируемых точек, обеспечивающих требуемую точность представления геометрических параметров детали;
- разработать рекомендации для области применения конкретных координатно-измерительных машин при контроле геометрических параметров поверхностей «похожих» на плоскость и цилиндр.

### *Список литературы*

1. Готовцев А. Geomagic Studio знает, что делать с облаком точек // САПР и графика. – 2012. – №9. – С.53-55.
2. ГОСТ 24642-81. Допуски формы и расположения поверхностей.
3. Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н. Измерения и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – М., 1978 г. – С. 231.
4. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия: Учебное пособие. – Новосибирск: СО РАН, 2005. – С. 744.
5. Кашуба Л.А. Представление геометрии поверхностей изделий машиностроения. Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011. – №1. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/11>. – Идентификационный номер 0421100111\0004.
6. Кашуба Л.А. Реальная геометрия детали // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2012. – №1. – С. 3-13.