УДК 629.7.052, 62.50

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ

Соловьев Владимир Николаевич

Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Филиал «Дмитров»;
141800, Московская обл., г. Дмитров, пос. ДЗФС, 23;
e-mail: soloviov-vn@rambler.ru.

В филиале «Дмитров» международного университета «Дубна» могут решаться сложные задачи по обработке больших массивов измерительной информации и планирования экспериментов. Такие задачи встречаются в отраслях космической промышленности, атомной энергетики, геодезии и т.д. Особенностью этих задач фактически являются избыточность имеющихся данных и наличие немоделируемых возмущений, либо возможность выбора моментов или расположения наблюдений (планирование экспериментов). Одну из первых таких задач поставил академик А.Н.Колмогоров в 1963 г. в связи с исследованиями солнечной активности. Однако и в более изученных моделях реально всегда присутствуют стохастические неопределенности, либо очень малые немоделируемые возмущения. Имеющийся в филиале «Дмитров» комплекс программ гарантирующего оценивания, который первоначально возник в отрасли космической промышленности, может быть нами применен для решения любых задач по обработке больших массивов измерительной информации, а также для решения задач по планированию экспериментов любой природы.

Ключевые слова: комплекс программ, оптимальное гарантирующее оценивание, стохастическая неопределенность.

COMPUTER PROGRAMS OF OPTIMAL GUARANTEED ESTIMATION

Solov'ev Vladimir

Doctor of Science Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Branch «Dmitrov»;
141800, Dmitrov, Moscow reg., DZFS, 23;
e-mail: soloviov-vn@rambler.ru.

Complex problems of processing large observation data may be solved in Dmitrov Branch of Dubna International University. Such problems arise in cosmic and nuclear energy industries, geodesy, etc. The peculiarity of these problems is an abundance of observation data and the presence of unmodeled disturbances. In this paper we briefly describe computer programs for numerical solution of optimal guaranteed estimation problems.

Keywords: computer programs, optimal guaranteed estimation, stochastic indefinity.

Введение

Вначале мы приведем цитату из книги А.Н.Тихонова и В.Я.Арсенина (см. [24], с. 30): «К числу важных задач относится задача создания систем автоматической математической обработки результатов физического эксперимента. Одним из этапов обработки является решение обратных задач вида $Az = u$ относительно z. Большое число современных экспериментальных установок для исследования различных физических явлений и объектов являются сложными и дорогостоящими комплексами (ускорители элементарных частиц, установки для получения и исследования высокотемпературной плазмы, для исследования свойств вещества при сверхнизких температурах и др.).

Желание иметь надежную информацию об исследуемом явлении, изучение «редких» и «слабых» эффектов часто приводит к необходимости многократного повторения единичного эксперимента. Автоматизация проведения эксперимента и способов регистрации его результатов позволяют получать за короткое время весьма большой объем необходимой информации (десятки и сотни тысяч снимков, осциллограмм, показаний детекторов и т. п.). Для получения из этой информации необходимых характеристик изучаемого явления или объекта требуется последующая обработка результатов наблюдений».

К сказанному можно добавить, что при наличии такого огромного количества фактических данных наблюдений совершенно необходимо учитывать влияние стохастических неопределенностей и немоделируемых возмущений (см., например, [2, с. 15 ,95 ,97] или [26]). Как бы ни были малы такие возмущения, при неограниченном увеличении числа наблюдений точность получаемых оценок может становиться все хуже и хуже (по крайней мере, в этих случаях заведомо теряется свойство состоятельности статистических оценок). Это послужило причиной развития неклассических подходов к задаче обработки результатов наблюдений, один из которых мы сейчас кратко опишем.

1. Постановка задачи.

Одним из направлений в теории минимаксного оценивания является оптимальное гарантирующее оценивание [1, 2, 9 – 23, 28 – 31], которое первоначально возникло в отрасли космической промышленности. В этом направлении задача оценивания рассматривается в случае ограниченных дисперсий и коэффициентов корреляции ошибок наблюдений (либо ограниченных средних значений и ковариаций).

Затем аналогичный подход возник также в отрасли атомной энергетики, где использовались спектральные ограничения на немоделируемые возмущения [7].

Рассмотрим линейную модель

$$u = Az + \xi \,, \tag{1.1}$$

в которой $u \in R^{\mathrm{N}}$ – вектор измерений, $z \in R^{m}$ – вектор состояния системы ($\mathrm{N} \ge m$), ξ – вектор случайных ошибок ξ_j, имеющих средние значения $\mathrm{E}\xi_j$ и ковариационную матрицу

$$\mathrm{K} = \left\|\kappa_{js}\right\| = \mathrm{E}(\xi_j - \mathrm{E}\xi_j)(\xi_s - \mathrm{E}\xi_s)\,,\; j,s = 1,\ldots\mathrm{N}. \tag{1.2}$$

Предполагается, что матрица A имеет ранг m и выполнены следующие статистические гипотезы [2]:

а) средние значения и дисперсии ошибок измерений ξ_j ограничены:

$$\left|\mathrm{E}\xi_j\right| \le \mathrm{M}_j, \quad j = 1,\ldots,\mathrm{N}; \tag{1.3}$$

$$\kappa_{jj} \le \sigma_j^{\,2}, \quad j = 1,\ldots,\mathrm{N}; \tag{1.4}$$

б) коэффициенты корреляции $r_{js} := \kappa_{js}(\kappa_{jj}\kappa_{ss})^{-1/2}$ ошибок измерений ξ_j и ξ_s ограничены:

$$\left|r_{js}\right| \le w_{js}\,,\; j,s = 1,\ldots,\mathrm{N}, \tag{1.5}$$

где $\left\|w_{js}\right\|$ – положительно определенная матрица с элементами $w_{js} \ge 0,\;\; j \ne s,\;\; w_{ss} = 1,$ и $\mathrm{M}_j,\;\; w_{js},$ $\sigma_j^{\,2}$ – априорно заданные числа.

Наряду с ограничениями (1.5) можно также рассматривать случай положительной корреляции ошибок измерений

$$\mathrm{E}\xi_i = 0{,}0 \le r_{ij} \le w_{ij}\,, i, j = 1,\ldots, \mathrm{N}. \tag{1.6}$$

Кроме того, вместо ограничений (1.3) – (1.5) иногда удобно считать, что заданы прямые ограничения на ковариации ошибок измерений:

$$\mathrm{E}\xi_i = 0,\ |\kappa_{ij}| \le d_{ij}, \qquad i, j = 1,\dots,\mathrm{N}, \tag{1.7}$$

или же заданы ограничения на их вторые моменты:

$$|\mathrm{E}\xi_i\xi_j| \le d_{ij},\ i, j = 1,\dots,\mathrm{N}, \tag{1.8}$$

в которых $\|d_{ij}\|$ – заданная положительно определенная матрица с неотрицательными элементами. К этим ограничениям следует добавить требование неотрицательной определенности матрицы ковариаций (1.2).

Обозначим через P класс всех распределений P случайного вектора $u = \mathrm{A}z + \xi$, таких что (неслучайный) вектор состояния системы z принадлежит R^m, а вектор случайных ошибок $\xi \in R^{\mathrm{N}}$ удовлетворяет статистическим ограничениям (1.3) – (1.5). В теории оптимального гарантирующего оценивания обычно рассматривают линейные оценки $\ell(u) = x^{\mathrm{T}}u,\ \ x \in R^{\mathrm{N}}$ заданного скалярного параметра $\ell = c^{\mathrm{T}}z,\ c \in R^m$. В качестве функции риска принимается среднеквадратичная ошибка оценки. Для произвольной оценки $\ell(u)$ максимальное (гарантированное) значение функции риска $\mathrm{E}_p|\ell - \ell|^2$ будет равно

$$D(\ell) := \sup_{\mathrm{P}\in P} \mathrm{E}_p|\ell - \ell|^2. \tag{1.9}$$

Как показано в монографии [2] , величина (1.9) будет конечна, только если оценка $\ell(u) = x^{\mathrm{T}}u$ удовлетворяет условию «несмещенности»:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}x = c. \tag{1.10}$$

В этом случае

$$D(\ell) := D(x) = \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} d_{ij}|x_i|\,|x_j|, \tag{1.11}$$

где

$$d_{js} := \sigma_j\sigma_s w_{js} + \mathrm{M}_j\mathrm{M}_s.$$

Равенство (1.11) сохраняется также и для прямых ограничений (1.7) на ковариации ошибок измерений. Таким образом, задача отыскания оптимального алгоритма гарантирующего оценивания принимает вид

$$D_{\min} := \min_x \{\ D(x):\ x \in R^{\mathrm{N}},\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}x = c\ \}. \tag{1.12}$$

2. Априорные статистические ограничения.

Основателями теории оптимального гарантирующего оценивания были М.Л. Лидов, П.Е. Эльясберг, Б.Ц. Бахшиян и др. Ими были введены разнообразные (иногда весьма общие) статистические ограничения на ошибки измерений [1, 2, 9, 12, 27]. Ниже нами будут рассмотрены следующие варианты априорных ограничений (далее r_{js} – коэффициент корреляции ошибок измерений ξ_i и ξ_s):

1) Случай затухающей корреляции ошибок измерений [1]

$$\mathrm{E}\xi_j = 0,\ |r_{js}| \le \exp(-\alpha|t_j - t_s|),\ \ j \ne s; \tag{2.1}$$

2) Случай ограниченных средних ошибок измерений [2, 8, 9]

$$\left|\mathrm{E}\xi_j\right| \le \mathrm{M}_j,\ r_{js} = 0,\ j \ne s. \tag{2.2}$$

Во всех трех случаях предполагается, что дисперсии ограничены:

$$\kappa_{jj} \le \sigma_j^{\ 2},\ j = 1,...,\mathrm{N}.$$

3) Пусть имеется r групп измерений

$$\{\ u_{ij},\ j = 1,...,\mathrm{N}_i\ \},\ i = 1,...,r, \tag{2.3}$$

которые между собою не коррелированны, и в каждой из которых средние значения $\mathrm{E}\xi_{ij}$ ошибок измерений ξ_{ij} ограничены по модулю числами M_i, дисперсии ограничены числами σ_i^2, а коэффициенты корреляции ограничены по модулю числами $0 \le \kappa_i < 1,\ i = 1,...,r.$ Пусть

$$x := (x^1,...,x^r),\ x^i := (x_{i1},...,x_{i\mathrm{N}_i})^{\mathrm{T}},\ i = 1,...,r.$$

Тогда формула (1.11) принимает вид [27]

$$D(x) = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2[\ (1-\kappa_i)\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_i}x_{ij}^2 + \kappa_i(\ \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_i}\left|x_{ij}\right|\ )^2\ ] + (\ \sum_{i=1}^{r}\mathrm{M}_i\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_i}\left|x_{ij}\right|\ )^2.$$

4) Пусть имеется r некоррелированных групп измерений (2.3), в каждой из которых средние значения $\mathrm{E}\xi_{ij}$ ошибок ξ_{ij} ограничены по модулю числами M_i, дисперсии ограничены числами σ_i^2, а коэффициенты корреляции ограничены по модулю числами

$$e^{-\alpha_i\left|t_{ij}-t_{is}\right|},\ j,s = 1,...,\mathrm{N}_{i,}$$

где t_{ij} – моменты проведения измерений $u_{ij}, i = 1,...,r$. Тогда формула (1.11) имеет вид [27]

$$D(x) = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\sum_{j,s=1}^{\mathrm{N}_i}e^{-\alpha_i\left|t_{ij}-t_{is}\right|}\ \left|x_{ij}\right|\left|x_{is}\right| + (\ \sum_{i=1}^{r}\mathrm{M}_i\sum_{j=1}^{\mathrm{N}_i}\left|x_{ij}\right|\ )^2.$$

5) Пусть вектор ошибок измерений ξ может быть разбит на r групп ξ^{α}, а каждая группа ξ^{α} – на r_{α} подгрупп $\xi^{\alpha\beta}$, содержащих по $\mathrm{N}_{\alpha\beta}$ ошибок $\xi_{\alpha\beta\gamma}$, так что коэффициенты корреляции ограничены по модулю следующими величинами: κ – для ошибок разных групп, κ_{α} – для ошибок из разных подгрупп одной и той же группы $\xi^{\alpha}, \kappa_{\alpha\beta}$ – для ошибок из одной и той же подгруппы $\xi^{\alpha\beta}$. Кроме того, пусть ошибки $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ имеют нулевые средние и дисперсии $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$. При $0 \le \kappa \le \kappa_{\alpha} \le \kappa_{\alpha\beta} < 1$ имеем [27]

$$D(x) = \kappa(\ \sum_{\alpha\beta\gamma}\left|\sigma x\right|_{\alpha\beta\gamma}\ )^2 + \sum_{\alpha}\{\ \Delta\kappa_{\alpha}(\ \sum_{\beta\gamma}\left|\sigma x\right|_{\alpha\beta\gamma}\ )^2 + \sum_{\beta}[\Delta\kappa_{\alpha\beta}(\ \sum_{\gamma}\left|\sigma x\right|_{\alpha\beta\gamma}\ )^2 + \bar{\kappa}_{\alpha\beta}\sum_{\gamma}\left|\sigma x\right|_{\alpha\beta\gamma}^2]\ \},$$

где

$$\Delta\kappa_{\alpha} := \kappa_{\alpha} - \kappa \ge 0, \quad \Delta\kappa_{\alpha\beta} := \kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha} \ge 0,\ \bar{\kappa}_{\alpha\beta} := 1 - \kappa_{\alpha\beta} > 0$$

и суммирование ведется по $\alpha = 1,...,r; \beta = 1,...,r_{\alpha},\ \gamma = 1,...,\mathrm{N}_{\alpha\beta}$.

6) Аналогично рассматривается случай положительной корреляции (1.5), когда коэффициенты корреляции κ_{ij} ограничены сверху величинами κ для ошибок из разных групп, κ_{α} – для ошибок из разных подгрупп одной и той же группы ξ^{α}, $\kappa_{\alpha\beta}$ – для ошибок $\xi^{\alpha\beta}$ из одной и той же подгруппы [27] .

7) Как показано в работах [8, 12 – 16, 28] возмущающие ускорения индуцируют неслучайные ошибки измерений, для которых можно получить мажорантные оценки вида (1.3), где M_j – это некоторые известные числа (подробнее о задачах оценивания с немоделируемыми возмущениями можно узнать по работам [12 – 16]).

3. Комплекс программ гарантирующего оценивания.

Имеющийся в филиале «Дмитров» комплекс программ гарантирующего оценивания, который возник в отрасли космической промышленности, первоначально был реализован для указанных выше вариантов 1)–3) статистических ограничений на ошибки измерений. Однако теоретические разработки позволяют распространить этот комплекс и на статистические ограничения 4)–8) (см. [22, 23]). Отметим, что в работах [5, 6, 10 – 16, 19 – 22, 29, 3, 30] описаны применения методов оптимального гарантирующего оценивания к численному решению нескольких задач из отрасли космической промышленности.

В нашем комплексе программ задачу (1.12) можно решать любым из трех реализованных методов: градиентным методом [4, 19, 21], минимаксным методом наименьших квадратов [29] и усеченным методом наименьших квадратов [22]. Все эти три метода основаны на решении двойственной задачи к экстремальной задаче (1.12). Работа любого из этих методов начинается с оценок неоптимальности метода наименьших квадратов [17], которые играют важную роль в рассматриваемых задачах, поскольку по самой своей природе задача оптимального гарантирующего оценивания не требует высокой точности поиска минимума ни по функционалу, ни по аргументу. В некоторых случаях благодаря таким оценкам можно вообще не решать задачу оптимизации, приняв МНК-оценку в качестве оптимальной.

Сравнение эффективности всех трех методов было проведено в работе [22] на задаче оценивания параметров движения спутника по околокруговой орбите, где приходится как-то учитывать присутствие малых немоделируемых возмущений. Вместо точного решения задачи с немоделируемыми возмущениями была рассмотрена мажорантная задача, в которой средние ошибки измерений ограничены согласно (1.3).

Заключение

При наличии заказчика нами могут решаться любые сложные задачи по обработке больших массивов измерительной информации и планирования экспериментов, в особенности при наличии немоделируемых возмущений или избыточности имеющихся фактических данных наблюдений.

Список литературы

1. Бажинов И.К., Почукаев В.Н. Оптимальное планирование навигационных измерений в космическом полете. – М.: Машиностроение, 1976.
2. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения. – М.: Наука, 1980.
3. Бахшиян Б.Ц., Райкунов Г.Г., Соловьев В.Н., Щекутьев А.Ф. Компактный алгоритм минимаксного оценивания параметров движения // Тезисы докл. Всесоюзного совещания «Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики». – Ленинград: ИТА АН СССР, 1989.
4. Бахшиян Б.Ц., Соловьев В.Н. Применение теоремы двойственности к задаче оптимального гарантированного оценивания // Космические исследования, 1990. – Т.28. – №2. – С. 163-169.
5. Биркун Г.И., Матасов А.И. Метод наименьших квадратов в задаче гарантированного оценивания. Математические модели динамики управления системами машин и механизмов // Сб. научн, тр. – МЭИ, 1989. – №217. – С. 47.

6. Голован А.А., Мартиросян С.Р., Матасов А.И. Численное сравнение оптимального гарантированного алгоритма с алгоритмом метода наименьших квадратов // Космические исследования. – 1988. – Т.26. – №2. – С. 319.

7. Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А. Минимаксная обработка информации. – М.: Энергоатомиздат, 1990.

8. Легостаева И.Л., Ширяев А.Н. Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1971. – Т. 16. – №2. – С. 339-345.

9. Лидов М.Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. – 1964. –Т. 2. – №5. – С. 713.

10. Лидов М.Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений и алгоритмы их решения // Космические исследования. – 1971. – Т.9. – №5. – С. 687.

11. Лидов М.Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. Космические исследования. –1984. – Т.22. – №4.

12. Лидов М.Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения // Космические исследования. – 1986. – Т. 24. – №2. – С. 246.

13. Лидов М.Л., Бакума Л.М. Применение алгоритма оптимальной коррекции для решения задачи оценивания с немоделируемыми ускорениями // Космические исследования. – 1988. – Т.26. – №3. – С. 339-352.

14. Лидов М.Л., Бакума Л.Н. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. Космические исследования. – 1991. – Т.29. –№1. – С. 115-126.

15. Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор). Космические исследования. – 1991. – Т.29. – №5. – С. 659-684.

16. Лидов М.Л. Об опыте численного решения задач оценивания и стохастического управления в гарантирующей постановке // Изв. АН России. Техн. кибернетика. – 1993. – №4. – С. 35-43.

17. Матасов А.И. Об априорной точности метода наименьших квадратов в задачах гарантированного оценивания, части I, II // Космические исследования. –1990. – Т.28. – №1. – С. 11. – Т.28. – №2. – С. 170.

18. Матасов А.И. Введение в теорию гарантирующего оценивания. – М.: изд. МАИ, 1999.

19. Соловьев В.Н. Некоторые алгоритмы квадратичного программирования и оптимального гарантирующего оценивания // Автоматика и Телемеханика. – 1990. – №9. – С. 67-73.

20. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы минимаксного оценивания параметров движения в непрерывной постановке // Космические исследования. – 1991. – Т. 29. – №1. – С. 127-132.

21. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания. Космические исследования. – 1992. – Т.30. – №1. – С.10-23.

22. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания и усеченный метод наименьших квадратов // Космические исследования. – 1995. – Т.33. – №1. – С. 3-11.

23. Соловьев В.Н. Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания // Успехи мат. наук. – 1997. – Т.52. – №4. – С. 49-86.

24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

25. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука, 1976.

26. Эльясберг П.Е. Об устойчивости характеристик точности определения орбит по результатам измерений // Космические исследования. – 1978. – Т.16. – №5.

27. Эльясберг П.Е. Априорная гарантированная оценка точности определения орбиты космического аппарата методом наименьших квадратов // Космические исследования. – 1984. – Т.22. – №5. – С. 643.

28. Matasov A.I. Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht-Boston-London, 1999.

29. Soloviov V. Minimax estimation and the least squares method // Stochastics and Stochastics reports, 1993. – Vol.42. – Pp. 209-223.

30. Белоусов Л.Ю. Оценивание параметров движения космических аппаратов. – М.: Физматлит, 2002.

31. Соловьев В.Н. Численные алгоритмы решения плохо обусловленных задач в условиях стохастической неопределенности // «Системный анализ в науке и образовании»: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2010. – №3. – [Электронный ресурс]. URL: http:/www.sanse.ru/archive/11 (дата обращения: 30.10.2010). – Идентификационный номер 0421000111\0025.