УДК 004.415.2, 004.588

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИМИ И ЛОГИЧЕСКИМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ. Ч.1: ЛОГИКА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ И КОРРЕКТНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ – РАСЧЕТНЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ

Ульянов Сергей Викторович[1], Решетников Геннадий Павлович[2], Токарева Надежда Александровна[3], Крейдер Оксана Александровна[4]

[1]Доктор физико-математических наук, профессор;
ГБОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент;
ГБОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: Reshetnikov@jinr.ru.

[3]Кандидат физико-математических наук, доцент;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: tokareva@uni-dubna.ru.

[4]Кандидат технических наук, доцент;
ГБОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: okrei@mail.ru.

Рассмотрены общие вопросы построения корректных математических моделей физических объектов. Введены необходимые информационно-термодинамические ограничения на физическую реализуемость математических моделей.

Ключевые слова: математические модели, информационно-термодинамические ограничения, физические объекты

INTELLIGENT CONTROL SYSTEMS OF PHYSICAL AND LOGIC EXPERIMENTS. PT. 1: LOGIC OF NONCONTRADICTION AND APPROXIMATION CORRECTNESS OF FORMAL PHYSICAL MODELS – COMPUTATIONAL AND MATHEMATICAL OBJECT MODELS

Ulyanov Sergey[1], Reshetnikov Gennady[2], Tokareva Nadeshda[3], Kreider Oksana[4]

[1]Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

[2]*Candidate of Science in Physics and Mathematics, associate professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: Reshetnikov@jinr.ru.*

[3]*Candidate of Science in Physics and Mathematics, associate professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: tokareva@uni-dubna.ru*

[4]*Candidate of Science in Engineering, associate professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: okrei@mail.ru.*

General problems of correctness mathematical models design of physical objects are discussed. Necessary information-thermodynamic constraints for physical realization of mathematical models are introduced.

Keywords: mathematical models, information-thermodynamic constraints, physical objects.

Введение

При изучении физического, логического или другого какого-либо явления первоначально изучаются качественные особенности проблемы посредством имитационного моделирования.

На первом этапе моделирования качественное представление переходит в количественное описание. На втором этапе необходимо решать задачу планирования физического (имитационного) эксперимента и формирования модели исследуемого физического объекта по экспериментальным результатам с последующей оценкой корректности полученной модели.

В общем виде моделированием называют процесс воспроизведения и построения модели того или иного явления реального мира, т.е. *модель* – это *абстрактная аппроксимация реального явления*, сохраняющая его существенную структуру таким образом, чтобы ее анализ дал возможность определить влияние одних сторон явления на другие или же на явления в целом.

Таким образом, модель можно определить как условный образ (упрощенное изображение или аппроксимация) реального объекта (процесса), который создается для более глубокого изучения реальной действительности.

Для компенсации возникающих в процессе моделирования и эксперимента аппроксимаций и упрощений требуются новые принципы робастного интеллектуального управления физическим экспериментом и соответствующего инструментария исследования, позволяющие ослабить влияние ошибки аппроксимации на качество модели и сформировать робастные модели физических объектов, не чувствительных к изменениям условий функционирования и внутренним изменениям параметров структуры.

В результате возникает проблема разработки модели физического или логического объектов и самого интеллектуального управления робастным физическим и логическим экспериментом с учетом, например, начальной априорной информации и других особенностей объекта[1].

[1]Rojas C.R. , Aguero J.- C., Welsh J.S., Goodwin G.C., Feuer A. Robustness in experiment design // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2012. – Vol. 57. – №4. – Pp. 860-874.

Трудности поиска решения такой задачи, в свою очередь, связаны с необходимостью реализации ряда физических и информационно-термодинамических принципов робастного интеллектуального управления.

К таким принципам в первую очередь относятся: (i) *принцип компенсации информационной неполноты описания модели* (в общем случае слабоструктурированных) объектов управления (ОУ) выбором соответствующего уровня интеллектуальных вычислений (ИВ); (ii) *принцип соответствия алгоритма интеллектуального управления* уровню сложности и неполноты представления знаний о внешней среде функционирования ОУ (связь информационной энтропии с мерой алгоритмической сложности Колмогорова); (iii) *принцип минимума потерь полезного ресурса* (минимум обобщенной энтропии – физический закон оптимального управления) в системе «*объект управления + регулятор*»; и (iv) *принцип не разрушения и повышения эффективности нижнего исполнительского уровня* системы управления физическим экспериментом за счет самоорганизации баз знаний (БЗ) интеллектуального регулятора.

Выполнение и реализация новых физических (информационно-термодинамических) принципов интеллектуального робастного управления осуществляются на основе решения следующих трех принципиальных проблем.

А. В первом случае, в отличие от прямой задачи (описания знаний количественными характеристиками), рассматривается решение обратной задачи теории искусственного интеллекта: извлечение, обработка и формирование знаний из количественных данных физических и логических экспериментов. В этом случае разработанная технология проектирования объективных БЗ на основе оптимизаторов БЗ на мягких и квантовых вычислениях исключает субъективизм экспертных оценок, обеспечивает достижение требуемого уровня робастности интеллектуальных систем управления (ИСУ).

Б. Во втором случае рассматривается проблема разработки и физического обоснования математической модели квантового алгоритма управления самоорганизацией знаний для формирования робастных БЗ в реальном времени. Важна при этом роль прямых аналогов физических (квантовых и термодинамических) эффектов в реализации процесса гарантированного достижения качества управления на основе технологии квантовых, мягких и дробных вычислений.

При этом основное внимание уделяется описанию и интерпретации качественных особенностей биологически воспроизводимой (биоинспирированной) эволюции самоорганизации, основные компоненты которой описываются квантовыми операторами и составляют физическое содержание разработанной модели квантового алгоритма управления процессом самоорганизации.

В этом случае рассматривается задача робастного управления в непредвиденных ситуациях на основе квантовых стратегий принятия решений в виде программного инструментария квантового нечеткого вывода как частного случая разработанного квантового алгоритма управления самоорганизацией знаний.

В. Решение третьей проблемы демонстрирует результаты применения ИТ проектирования робастных БЗ непосредственно в структуре ИСУ. При этом существуют особенности проектирования робастных БЗ для непредвиденных ситуаций управления физическим экспериментом и в условиях информационного риска для ИСУ, включающих в свою структуру оптимизаторы БЗ.

Синергизм неточной (imperfect) информации и синергетический эффект квантовой самоорганизации БЗ в условиях непредвиденных ситуаций основан на технологии извлечения скрытой в классических состояниях (неизмеримой в общем виде классическими приборами) квантовой информации (дополнительный информационный ресурс).

Рассмотрим поэтому на данном этапе кратко некоторые общие принципы построения моделей.

1. О принципах построения моделей физических и логических систем

С позиции системной инженерии, очевидно, что анализ процесса моделирования должен начинаться с восприятия реальности существования моделируемых объектов, т.е. признания объективной реальности. Этот анализ основывается на следующих основных принципах теории отражения когнитивных процессов:

- Модель является отражением реально существующего объекта, причем гносеологическим отражением.
- Модель является гомоморфным отражением объекта, следствием чего является сокращение и упрощение структуры оригинала. Модель воспроизводит лишь основные, наиболее существенные для исследования стороны изучаемого объекта. (Напомним, что *Гомоморфизм* – когда несколько свойств объекта отображаются в одно свойство; *Изоморфизм* – взаимно однозначное соответствие (одно в одно)).
- Модель предполагает участие в ее создании и конструировании познающего её субъекта исследования.

В зависимости от логических свойств и связей моделей физических явлений разрабатываемые в системной инженерии модели можно разделить на три типа: физические, расчетные и математические модели. Здесь кратко отметим особенности математических моделей.

Особенности математических моделей физических явлений состоят в том, что они точны, абстрактны и передают информацию (логически однозначным) образом. По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

Математические модели, являясь наиболее общими и абстрактными, используя символы математического или логического характера, служат отражению и анализу некоторых свойств физических объектов и явлений. Особые трудности возникают при решении задач с большой размерностью, расплывчатой (нечеткой) постановкой, неопределенностью информации и т.д.

В постановке таких задач появляются неклассические понятия и моменты, такие, как плохая формализуемость, нестандартность, противоречивость, некорректность; часто приходится отказываться от привычных определений и понятий. Следует отметить, что в теоретической физике[2] данному вопросу давно уделяется пристальное внимание: «Таким образом, обобщение физических теорий связано не только с приобретением новых понятий, но и с отказом от старых. Здесь необходимо отметить следующий психологический фактор: отказ от старых, привычных физических понятий дается несравненно труднее, чем усвоение новых понятий, не связанных с таким отказом.

Чтобы ясно представить себе необходимость такого рода отказа, мы попытаемся проследить процесс образования понятий в направлении, в известном смысле обратном историческому развитию теории. Если идти в этом направлении, то мы должны будем исходить из наиболее общей известной в данный момент физической теории; мы убедимся, что при каждом ее упрощении, при каждом переходе к более частной теории будут возникать все новые и новые физические понятия. Но тогда будет ясно, что обратный процесс – переход от более частной теории к более общей – должен быть связан с отказом от некоторых физических понятий».

Рассмотрим теперь кратко особенности принципов моделирования физических объектов и их логическую взаимосвязь.

Принципы моделирования физических объектов Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании данных эксперимента.

Считается, что *практика есть критерий истинности теории*. Однако наблюдения, строго говоря, не могут доказать справедливость теории. Они могут лишь косвенно свидетельствовать о её справедливости или опровергнуть ее. Субъективный анализ наблюдений может фальсифицировать теорию, поэтому важную роль играет *принцип воспроизведения (повторяемости) экспериментальных физических результатов при корректном воспроизведении экспериментальных условий вне зависимости от места и времени*.

[2]Фок В.А. Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике // Успехи Физических Наук. – 1936. – Т. 16. – Вып. 8. – С. 1070-1083.

Формализация экспериментального статистически достоверного материала – не единственный способ построения математической модели. Важную роль играет *принцип получения моделей, описывающих частные объекты, из моделей более общих***.**

Основной принцип построения математической модели физического явления При построении математической модели изучаемого объекта, из всех характеризующих его связей выделяются наиболее существенные. Если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены одновременно.

Одним из главных *принципов моделирования* является следующий: модель должна соответствовать оригиналу только в главном, существенном, в том, что интересует исследователя; все несущественное должно быть отброшено.

Достаточно привести цитату из упомянутой работы В.А. Фока в следующем виде: «Как мы уже говорили, уравнения теоретической физики никогда не бывают абсолютно точными. Даже и та теория, которая на данном этапе развития физики является наиболее общей, не может претендовать на универсальность, так как она содержит в себе ряд физических пренебрежений. Поэтому, приступая к формулировке такой теории, необходимо, прежде всего, выяснить, каковы эти пренебрежения и чем ограничена применимость тех основных физических понятий, с которыми данная теория оперирует. Одной из наиболее общих существующих физических теорий является квантовая электродинамика. Теория эта не входит в рассмотрение природы атомной структуры материи, а принимает ее как экспериментальный факт. Структура материальных частиц в ней не рассматривается, а эти частицы характеризуются суммарно некоторыми константами, в частности их зарядом и массой.

Такого рода нестрогости, которые являются следствием лежащих в основе теории пренебрежений, несомненно, являются крупным ее недостатком. Тем не менее, в данной приближенной теории эти нестрогости физически необходимы. Они представляют по существу грубый прием, посредством которого исправляются недостатки первоначальной формулировки, неправильно учитывающей, например, роль световых квантов с весьма большой энергией.

Тем не менее, несмотря на все свои недостатки, теория, основанная на волновом уравнении, правильно описывает весьма обширный класс физических явлений. Она с большой степенью точности передает процессы излучения атомов и молекул, и позволяет определить не только частоты, но и естественную ширину спектральных линий. Она приводит к правильной формуле для рассеяния света свободными электронами (формула Клейна-Нишины).

Наконец, она дает поправки к кулоновскому закону взаимодействия между электронами; поправки эти происходят от испускания и поглощения электронами световых квантов (в классической теории соответствующая поправка толковалась как учет запаздывания потенциалов)».

Можно отметить ещё несколько принципов моделирования физических явлений:

- *Принцип аналогий*: Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных физических объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями;
- *Принцип иерархичности моделей*: Принцип «от простого к сложному» – построение цепочки (иерархии) все более полных физических моделей, каждая их которых обобщает предыдущую, включая её в качестве составного случая;
- *Принцип универсальности*: Если закон сохранения справедлив для произвольного n - мерного объема, то он справедлив и для любой его части;
- *Принцип непротиворечивости моделей*: Для построения математических моделей естествознания необходимы четкие непротиворечивые формулировки основных понятий, которые будут положены в основу самих исследований.

2. О корректности физических моделей и логической непротиворечивости математических моделей

Рассмотренный традиционный подход (и многие другие методы) к решению задач теории и практики разработки моделей физических и логических объектов и процессов на основе существующих в прикладной математике формально-логических методов ставит своей целью создание точных (в широком смысле) моделей на основе применения инструментария строгих суждений или логических выводов принятия решений.

В частности, в теории систем управления физическими экспериментами основное внимание приходится уделять вопросам оценки корректности, полноты, непротиворечивости, замкнутости, устойчивости, управляемости и многим другим качественным аспектам описания слабоструктурированных сложных моделей физических объектов и процессов управления[3].

Вопрос истинности утверждений и высказывания типа «математическая модель адекватна реальному физическому объекту» оставался по существу открытым и не мог быть решен только в рамках принятого метода исследования [1].

При применении в прикладных задачах обработки больших массивов данных физических экспериментов традиционными методами исчислений по конечному количественному результату численного алгоритма осуществляется соответствующая оценка качественного свойства исследуемого объекта (например, определение глобального экстремума сложной функции от многих аргументов). Логическая оценка свойства в общем случае может быть осуществлена только в конце количественных вычислений, а для алгоритмически неразрешимых численных проблем (в виде энтропийных мер сложности алгоритма по Колмогорову), часто искомая оценка не может быть достигнута [2-4].

Математическая модель (созданная на знаниях или данных из процессов обучения, на основе физических или логических законов, на извлеченных данных из физических измерений или наблюдений и т.д.) является неполной в силу принципиальной недоказуемости ее полноты в рамках принятой аксиоматики физической интерпретации [1, 4, 5].

В свою очередь, корректная физическая интерпретация делает математическую модель объекта реализуемой[4]. Полнота и адекватность модели интерпретируется как выполнение принятых за основу построения модели исходных аксиом и физических ограничений в виде законов поведения физической модели[5].

Здесь имеет место аналогия с теоремой Геделя о неполноте истинных формул арифметики [6, 7], информационные аспекты которой рассмотрены в [8]. Построение физически и математически корректных моделей динамических систем, например, в процессах управления физическим экспериментом представляет одну из основных и сложных задач теории автоматического управления [1, 9-12]. Основное содержание данной проблемы состоит в решении следующих проблем: описание процессов, происходящих в объектах управления, соответствующих методов формализации и установления соответствия (адекватности) получаемых таким образом моделей с исходным объектом, а также с методами исследования (в зависимости от уровня физической и математической строгости). Следует отметить, что процесс построения носит сложный эволюционный характер[6], связан с неизбежной аппроксимацией реального объекта[7] и приводит к потери информации при его описании[8].

При этом гипотезы и аксиомы, по которым осуществляется аппроксимация и описание реального объекта с помощью соответствующей модели, могут учитывать не все смысловое содержание реальной сущности физического процесса [1, 4], что приводит к дополнительному приращению информационного риска и неопределенности в описании модели объекта управления (ОУ) [9, 12, 13]. Таким образом, сложность математического описания физических систем как моделей ОУ приводит к необходимости аппроксимации и применению приближенных решений, которые не гарантируют в общем случае необходимые и достаточные условия достижения цели управления в непредвиденных ситуациях и возможности информационного риска [1, 12].

---

[3] Delphenich D. H. On the general structure of mathematical models for physical systems // arXorg: 1111.1602. – 2011.
[4] Клини С. Математическая логика. – М. Мир, 1973.
[5] Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М. Наука, 1967.
[6] Пайерлс Р. Построение физических моделей // Успехи Физических Наук. – 1983. – Т. 140. – № 2. – С. 315-322.
[7] Дайсон Ф.Дж. Упущенные возможности // Успехи Математических Наук. – 1980. – Т. 35. – Вып. 1. – С. 172-191.
[8] Balian R., Veneroni M. Incomplete description, relevant information, and entropy production in collision processes // Ann. Phys. – 1987. – Vol. 174. – № ½. – Pp. 229-244.

Принципиальное значение при формировании моделей ОУ имеет глобальная оценка функциональной реализуемости аппроксимации при наличии логико-информационных границ и физических (термодинамических, квантово-релятивистских и др.) ограничений на описание реальных нелинейных ОУ. На основе достоверности извлекаемого количества информации определяется информационная оценка приращения риска (статистической корректности) формируемого описания модели ОУ, и границ её применимости.

Разработка логически непротиворечивых и адекватных (корректных) моделей ОУ с целью эффективной реализации интеллектуального управления новыми видами современной техники является одной из актуальных проблем для современного этапа развития теории и систем управления.

В системном анализе хорошо известен факт, что в общем виде модель является приближением (с неизвестной, в общем случае, ошибкой аппроксимации) физического (реального) конечного ОУ. Менее известно, как оценить точность применяемого способа аппроксимации, и ещё меньше – как доказать корректность (например, по несколько заданным и часто плохо определенным критериям) и полноту разработанной модели (в смысле информативности представления описания свойств заданного физического ОУ для достижения цели управления).

Ошибка аппроксимации может иметь различной природы характер: 1) ошибки численного интегрирования дифференциального уравнения, описывающего движение нелинейного ОУ; 2) геометрического характера в виде некорректного выбора модели пространства – времени, например Евклидова пространства вместо пространства Римана, Лобачевского или Финслера; 3) физического характера в виде выбора модели описания ОУ на макроуровне вместо рассмотрения модели ОУ на микроуровне; 4) логического характера в виде выбора модели интерпретации результатов физического (или мысленного) эксперимента в рамках Булевой логики, вместо применения методов квантовой или релятивистских логик, например, для интерпретации нелокальных свойств явления телепортация или парадокса Эйнштейна-Розена-Подольского (ЭПР); 5) ошибка измерений параметров модели; 6) пренебрежением малыми параметрами с целью упрощения описания модели, и мн. др.

Одной из целей данной работы, является описание существующих объективных (физических, информационных и логических) ограничений, которые необходимо учитывать при разработке корректных физических и математических моделей ОУ и включать в содержание соответствующих БЗ в структурах ИСУ физическим экспериментом со слабо структурированными объектами.

Например, динамическое поведение ОУ и системы управления (регулятора) служит источником объективных знаний для формирования баз знаний (БЗ), полнота (soundness) которой зависит от достоверности извлекаемой из конкретного источника информации. Неточность (imperfect) измерения (обусловленная объективной природой объекта) и недостоверность (unreliable) представления извлекаемой информации (например, неполнота предоставления знаний экспертом или из-за присутствия человеческого фактора в контуре управления) приводит к повышению информационного риска и возникновению непредвиденных ситуаций управления, компенсация которых для обеспечения робастности управления осуществляется применением необходимого уровня интеллектуальных вычислений (ИВ).

Рассматриваются возможные подходы к построению аппроксимаций и оценок робастности таких моделей, роли видов ИВ в компенсации неточностей описания моделей ОУ и смежных вопросов, таких как синергизм информации при разработке процессов самоорганизации информационных процессов в ИСУ и др.

Введено понятие физической и математической корректности описания ОУ на основе определений физической, математической и расчетной модели ОУ.

3. Физические, расчетные и математические робастные модели объектов в теории систем

Термин «модель», подобно термину «устойчивость», несет большую смысловую нагрузку. Как правило, в него вкладывается различное содержание. При этом возникают существенные противоречия в определении таких понятий как «физическая», «расчетная» и «математическая» модель. Необходимо отметить, что проблема создания моделей имеет фундаментальное значение не только в кибернетике, как науке о системах, но и для всех естественных и технических наук.

Ниже формулируются (по возможности развернутые) определения употребляемых в этой области понятий, которые иллюстрируются рядом конкретных примеров.

3.1. Физические модели объектов и процессов

Под физической моделью какого-либо процесса, например, процесса работы системы управления при внешнем возмущении следует понимать по возможности полное (в соответствии с достигнутым уровнем знаний) описание этого процесса в физически содержательных терминах.

В физическую модель должны входить без всяких упрощений все известные функциональные, дифференциальные и другие соотношения и связи между структурными элементами процесса. Физическая модель должна также содержать имеющиеся экспериментальные данные, относящиеся к рассматриваемому процессу, изложение гипотез, которые могут быть сформулированы по поводу еще не изученных связей и соотношений между элементами системы.

Другими словами, физическая модель представляет собой содержательное отражение реальных явлений или процессов на уровне современных знаний. Физическая модель не может быть создана путем чисто эмпирического наблюдения данного класса объектов или процессов. Разумеется, для создания любой физической модели (которая может рассматриваться как физическая теория) необходимы эксперименты и наблюдения, однако понимание (корректная интерпретация) самих экспериментов невозможно без теории, т.е. без наличия физической модели изучаемого класса объектов и процессов. Набор эмпирических суждений и соотношений носит довольно запутанный характер, в котором существенные стороны изучаемых объектов и процессов нередко тонут в массе случайных или несущественных факторов. Построение подлинной физической модели или физической теории означает сведение множества эмпирических данных к немногим фундаментальным положениям и принципам, в которых отражалось бы существо изучаемых процессов. Построение подобной физической модели требует часто новых идей и понятий, нередко противоречащих уже сложившим представлениям.

Если через R обозначить реальный класс изучаемых объектов и процессов, через S – набор эмпирических данных о них и известных к этому времени теоретических представлений в данной области и, наконец, через Φ – физическую модель (или теорию) этого класса объектов или процессов, то можно написать следующее соотношение: $R \to S \to \Phi$.

Замечание. По поводу связи между R , S и Φ Альберт Эйнштейн[9] в письме к Б. Соловину замечает, что психологически Φ покоится на S, но, если речь идет о дальнейшем развитии физической теории, то не существует никакой формальной логической дороги, ведущей от S к Φ, но лишь интуитивная (экстралогическая) связь между ними. Та же мысль развивается Эйнштейном в письме к известному французскому математику Жаку Адамару. В другом месте Эйнштейн замечает, что «подлинной ценностью является, в сущности, только интуиция»[7].

В связи с отмеченным, рассмотрим некоторые проблемы, решение которых влияет на качество создаваемых моделей по результатам физических экспериментов и установления адекватности моделей.

Проблема 1: Выявление противоречивости, парадоксов и корректности формальной физической модели Φ на основе логики интерпретации эмпирических данных измерений S

В качестве примера физической модели Φ можно указать на квантовую модель строения атома Нильса Бора, развитую в последующих работах Гейзенберга и Шредингера. Рассматриваемая модель к моменту ее появления не только логически не следовала из известных к тому времени результатов спектроскопии и классической электродинамики, т.е. из совокупности знаний, которые обозначались ранее как S, но даже резко противоречила им.

---

[9] Эйнштейн А. Собрание сочинений. – М.: Наука, 1965-1968. – Т. I-IV.

Тем не менее, эта модель не только объяснила происхождение уже известных спектральных частот различных атомов, но позволила предсказать новые, неизвестные ранее спектральные частоты в низко и высоко частотной областях. Эта модель послужила основанием для создания современной физики – квантовой теории. Противоречие между классической электродинамикой и квантовой теорией привело к необходимости перестройки самой классической теории электродинамики. Так возникла квантовая электродинамика.

Следует особо подчеркнуть, что, оставаясь на классической точке зрения, следовало бы предположить, что внутри каждого атома есть система классических радиостанций, излучающих частоты, наблюдаемые при помощи спектроскопов. Поэтому невозможно было формально логическим путем построить модель атома Бора на основании данных спектроскопии.

Таким образом, между S и Φ действительно не существовало никакой формальной логической связи. Возникновение Φ (гипотеза Бора) привело к необходимости изменения самого комплекса S, поскольку предложенная модель Φ противоречила комплексу S. При этом часто само изменение S осуществлялось на основе интуиции исследователя.

В связи с этим поясним некоторые важные методологические и логические аспекты проблемы выявления адекватности эмпирических данных измерений S и логики оценки непротиворечивости формальных физических теорий моделей Φ.

Конечно, процесс построения физической теории и соответствующей формальной логической модели по своей природе не является чисто дедуктивным процессом и не может быть полностью формализован. Однако разработанная теория и построенная на ее основе модель физического объекта (даже слабоструктурированная) основана на дедукции, в той или степени формализованной. Поэтому построение логических систем, отличных от классической логики и учитывающих возможности и особенности, не учтенных в классической логике, способных выявлять логические противоречия в формальных теориях и системах, является важной задачей.

Особенно остро данная проблема имеет место при анализе противоречий логических (мысленных) экспериментов, которые являются неотъемлемой частью при разработке физических теорий, планировании физических экспериментов и корректной интерпретации полученных результатов. Постановка задачи о выявлении противоречий требует построения логики, с помощью которой могут быть рассмотрены противоречивые теории, немыслимые в рамках классической теории. Общая проблема построения противоречивых формальных теорий и лежащей в их основе логики была в явном виде сформулирована в 1948г. С. Яськовским[10]. Было построено логическое исчисление, в котором из противоречия не всегда следует «все, что угодно». Логические исчисления, которые могут лечь в основу противоречивых формальных теорий, получили наименование «паранепротиворечивых» (paraconsistent logic)[11].

Примечание 1. Отметим, что формальную систему называют *противоречивой*, если ее теоремами или аксиомами являются какие-либо две формулы A и *не* - A ($\neg A$), одна из которой есть отрицание другой. Систему называют *тривиальной*, если любая (правильно построенная) формула является ее теоремой или аксиомой. Любая нетривиальная система, основанная на классической логике, является тривиализуемой, так как присоединение к ней в качестве аксиом двух формул, одна из которых есть отрицание другой, превращает эту систему в тривиальную.

В качестве примера нетривиализуемой системы можно привести импликативное пропозициональное исчисление, единственной логической связкой которого является импликация[12]. «Промежуточное положение» занимает так называемое минимальное исчисление, в котором из противоречия следует не любая формула, а лишь отрицание любой формулы. Все главные дедуктивные средства в логике противоречивых систем должны быть сохранены в максимально возможной степени, так как

[10] Jas'kowski S. Rachuneck zdan' dla systemow dedukcyjnych sprezecznych // Studia Soc. Scient. Norunensis, Sec. A, 1948. – Vol. 1. – №2. – Pp. 57-77. (Studia Logica. – 1969. – Vol. 24. – Pp. 143-160. – Engl. translation).

[11] Розоноэр Л.И. О выявлении противоречий в формальных теориях. I, II // Автоматика и Телемеханика. – 1983. – № 6. – С. 113-124; С. 97-104.

[12] Черч А. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Иностр. лит., 1960. – Т. 1.

эти средства являются основой всех обычных рассуждений. В частности, должна быть сохранена позитивная логика, т. е., логические законы, не связанные с отрицанием. Фрагмент классической логики называется *максимальным*, если добавление к нему недоказуемой в нем формулы в качестве схем аксиом, либо дополняет его до классической логики, либо делает его тривиальным.

Таким образом, речь идет о построении максимального фрагмента классической логики, не содержащего принципа «из противоречия следует все, что угодно». Такие логические исчисления могут содержать характерные черты, в рамках которых возможны доказательства противоречивости. Действующий в классической логике принцип «из противоречия следует все, что угодно» тесно связан с невыполнением другого принципа, который называется «принципом недоказуемости из посторонних соображений».

В обсуждаемой логике противоречивых систем доказуемость (выводимость) *A* означает «неложность» *A*, доказуемость *не* - *A* – «неистинность» *A*, а противоречивость *A* означает «неложность» и «неистинность» *A* одновременно. Поэтому семантика такой логики подразумевает три истинностных значения – «истина», «ложь» и «противоречие». Причем выделенными являются два из них – «истина» и «противоречие»: наличие доказательства формулы *A* не означает, что *A* истинно, а исключает лишь, что *A* принимает значение «ложь».

Следовательно, получая возможность работать с противоречиями и доказывать противоречивость, логика должна нарушить непосредственную связь между доказуемостью и истинностью. Отказ от принципа «из противоречия следует все» влечет за собой невозможность выразить отличие «истинности» от «неложности» и «ложности» от «неистинности» средствами самой формальной системы. Различение между этими понятиями может быть проведено на уровне метаязыка. Третье истинностное значение – «противоречие» – может быть содержательно истолковано как «бессмыслица». Оба эти понятия тесно связаны. Бессмыслица может быть охарактеризована как неистинное высказывание, отрицание которого тоже неистинно, и одновременно как неложное высказывание, отрицание которого неложно. Если высказывание *A* бессмысленно, то и *A*, и его отрицание *не-A* естественно признать неистинными и одновременно неложными высказываниями.

Поэтому логика противоречивых систем связана с логическими исчислениями, рассматривающими, наряду с осмысленными, также и бессмысленные высказывания.

Таким образом, путем ослабления классической логики может быть построено исчисление, которое робастно не только к противоречиям, но с помощью которого эти противоречия могут быть выявлены (доказаны). Но ослабление классической логики влечет ослабление связи между доказуемостью и истинностью: доказуемость уже не означает истинность, а для различения между «истиной» и «неложью» необходим выход на уровень метаязыка. Противоречивость в выразительных средствах языка в математике с одной стороны недопустима, а с другой стороны в любом реальном (в том числе в математическом) языке имеются средства для обозначения объектов, предположение о существовании которых приводит к противоречию и высказывания о которых являются противоречивыми и бессмысленными.

Поэтому используется терминология, в которой каждое формально правильно построенное слово рассматривается как имя некоторого объекта, а затем выясняется, существует ли названный объект (т.е. имеет ли данное имя денотат). Высказывания о «несуществующих объектах» с точки зрения математической логики не истинны и не ложны – они противоречивы и бессмысленны. При этом объект характеризуется как «не существующий, если предположение о его существовании приводит к противоречию.

Однако понятия «существование» и «не существование» в общем случае носят относительный характер: то, что «не существует» в одной системе представлений, может «существовать» в другой (например, утверждение «треугольник, сумма углов которого не равна π » не существует в евклидовой геометрии, но существует в неевклидовой).

Конструирование несуществующих объектов приводит к логическим парадоксам.

Парадоксы рассматриваются как противоречия, в результате «вынужденно» принимаемых предположений о существовании «не существующих» объектов.

Рассмотрим важный пример физического мысленного эксперимента, иллюстрирующий рассмотренные ситуации в логике рассуждений.

Пример: Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) и неравенства Белла

В 1935 году Эйнштейн вместе с Подольским и Розеном [14] аргументировал неполноту квантовой механики на основе мысленного эксперимента с применением логических противоречий и парадоксов. Сформулированный парадокс носит название *парадокса* ЭПР. В последовавшей за этим дискуссии Эйнштейна и Бора и др. [15-17] выработалась *копенгагенская интерпретация* квантовой механики.

В своей первоначальной трактовке парадокс ЭПР выглядел следующим образом: рассмотрим процесс, в котором некая частица распадается на две других (рис. 1).

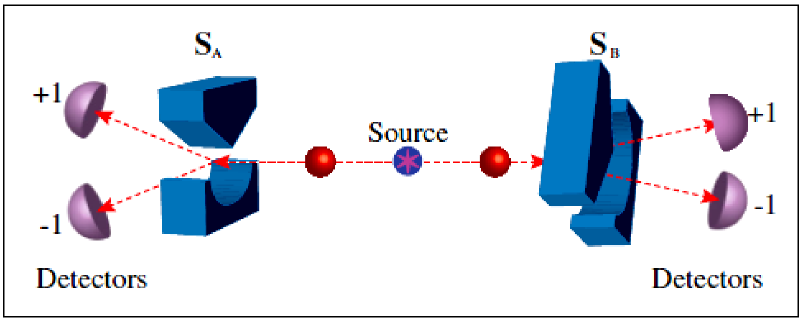


Рис. 1. Эксперимент ЭПР

По закону о сохранении импульсов их импульсы жестко связаны. Измеряя импульс одной частицы, тем самым получаем информацию об импульсе другой частицы. Измерив координату второй частицы, тем самым измерим одновременно и ее координату, и импульс, тогда как в рамках квантовой механики одновременно измерение *некоммутирующих* величин невозможно.

С точки зрения копенгагенской интерпретации логического парадокса не существует: при измерении координаты второй частицы изменяется ее состояние, и если до измерения она находилась в состоянии с фиксированным импульсом – то это состояние разрушается.

Долгое время разработанный вариант теории в эксперименте не проверялся. В 1951 году Д. Бомом был предложен вариант парадокса ЭПР, приближающий его к экспериментальной проверке. Вместо закона сохранения импульса было предложено использовать закон сохранения спина частиц, позволяющий создать систему двух коррелированных электронов с суммарным спином, равным нулю. Если обозначить состояние электрона со спином, направленным вверх, волновой функцией $|u\rangle$ (up), а со спином, направленным вниз $-|d\rangle$ (down), то волновая функция двух электронов будет иметь вид:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u,d\rangle - |d,u\rangle\right). \tag{1}$$

Напомним, что в обозначениях Дирака «кет»-вектор $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$.

Особенность волновой функции (1) в том, что ее нельзя записать как произведение волновых функций первого и второго электрона. Такие состояния называют «*запутанными*» [18].

Физический эксперимент проверки парадокса ЭПР Чаще анализировался аналогичный эксперимент, в котором вместо электронов рассматривались одновременно испущенные фотоны с ортогональными поляризациями. Такие фотоны могут возникать в результате двухфотонного излучения или при спонтанном параметрическом рассеянии (в последнем случае пара коррелированных фотонов носит название бифотона).

Волновая функция бифотона по-прежнему имеет вид $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|V,H\rangle - |H,V\rangle\right)$, где $|V\rangle$ – вертикально, а $|H\rangle$ – горизонтально поляризованный фотон, и не зависит от выбора базиса: если рассматривать поляризацию относительно оси, наклоненной на 45°, то волновая функция имеет вид $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle - |-,+\rangle\right)$, где $|+\rangle$ − фотон с поляризацией под 45°, а $|-\rangle$ – ортогональный ему фотон с поляризацией под (− 45°). Согласно постулатам квантовой механики при измерении поляризации одного фотона происходит редукция волновой функции, и второй фотон оказывается в состоянии с фиксированной поляризацией. Однако к моменту измерения фотоны может разделять большое расстояние, и согласно постулатам теории относительности второй фотон не мог мгновенно узнать о состоянии первого фотона.

С точки зрения Эйнштейна, это означает, что на самом деле состояние обоих фотонов было определено с самого начала, просто неизвестно каким оно было. Другими словами, существует некий *скрытый* параметр, определяющий результаты измерения обоих фотонов.

Таким образом, формулировка парадокса ЭПР в трактовке Бома предлагает в качестве альтернативы копенгагенской интерпретации *теорию скрытых параметров*, утверждающую, что невозможность получить полную информацию о состоянии частицы – недостаток знаний о системе, а не принципиальное свойство природы.

Экспериментальная проверка логической теории скрытых параметров Описанный эксперимент оставался умозрительным до 1964 года, когда Белл [19, 20] сформулировал *неравенства* Белла, которые всегда выполняются в рамках теории скрытых параметров, но нарушаются в квантовой механике [21].

Для вывода неравенства Белла рассмотрим эксперимент, в котором производится измерение поляризации двух коррелированных фотонов (рис. 2). Каждый из фотонов попадает на поляризационное зеркало (в качестве которого обычно используют поляризационные призмы), которое пропускает фотоны, поляризация которых направлена вдоль оси зеркала, и отражает ортогонально поляризованные фотоны. Фотон с поляризацией, составляющей угол φ с осью зеркала, по закону Малюса проходит через него с вероятностью $\cos^2\varphi$ и отражается с вероятностью $\sin^2\varphi$ и закон сохранения вероятности прохождения луча $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ выполняется. Детекторы (на рис. 2 по два на каждое зеркало) регистрируют как прошедшие, так и отраженные фотоны.

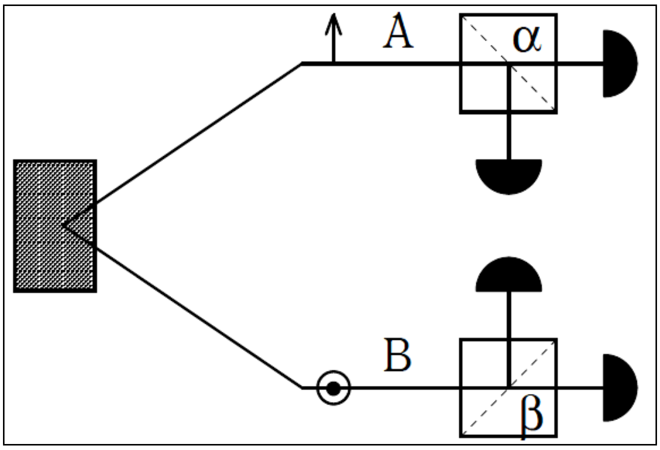


Рис. 2. Схема эксперимента по измерению поляризаций двух фотонов

Пусть величина $A(\alpha)$ равна единице (+1), если первый фотон прошел через зеркало, и минус единице (–1), если отразился. Угол α определяет направление оси поляризационного зеркала. Аналогично, $B(\beta) = \pm 1$ определяет результат измерения второго фотона. При измерении одного фотона величины A и B с одинаковой вероятностью $P(1) = P(-1) = 1/2$ принимают одно из двух значений, а результат их совместного измерения зависит от разности углов $\varphi = \alpha - \beta$. Поскольку фотоны имеют ортогональную поляризацию, то при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ значения A и B полностью коррелируют, а при $\varphi = 0$ −

антикоррелируют. Если сначала измеряется первый фотон, то с точки зрения квантовой механики в момент его измерения определяется поляризация второго фотона: если первый фотон прошел через зеркало, то поляризация второго фотона становится перпендикулярна оси α, а если первый отразился – то поляризация второго фотона параллельна этой оси. Далее вероятность прохождения или отражения второго фотона определяется по закону Малюса углом между поляризацией фотона $\alpha+\frac{1}{2}\pi$ и углом β, определяющим ориентацию второго зеркала. Таким образом, среднее значение $E(\alpha,\beta)$ произведения величин A и B, называемое коэффициентом корреляции, определяется в виде:

$$E(\alpha,\beta)=\langle A(\alpha)B(\alpha)\rangle=P_{++}(A,B)-P_{+-}(A,B)-P_{-+}(A,B)+P_{--}(A,B)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sin^2\varphi-\cos^2\varphi-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]=-\cos 2\varphi.$$

Неравенства Белла. Запишем наблюдаемую Белла-комбинацию произведений A и B для разных значений углов α и β:

$$s(\alpha,\alpha',\beta,\beta')=A(\alpha)B(\beta)-A(\alpha')B(\beta)+A(\alpha)B(\beta')+A(\alpha')B(\beta)=$$
$$=B(\beta)[A(\alpha)-A(\alpha')]+B(\beta')[A(\alpha)+A(\alpha')].$$

Поскольку величина $A=\pm1$, то одна из двух квадратных скобок всегда равна 0, а другая 2.

Отсюда следует, что наблюдаемая Белла $s(\alpha,\alpha',\beta,\beta')=\pm2$, а ее среднее значение удовлетворяет неравенству $\left|\langle s(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\rangle\right|\le 2$. Это неравенство – следствие теории скрытых параметров и выведено в предположении о существовании совместной функции распределения вероятностей четырех измеряемых величин $P\{A(\alpha),A(\alpha'),B(\beta),B(\beta')\}$. С другой стороны, среднее значение наблюдаемой Белла имеет вид комбинации коэффициентов корреляции:

$$\langle s(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\rangle=E(\alpha,\beta)-E(\alpha',\beta)+E(\alpha,\beta')+E(\alpha',\beta'),$$

т.е. является функцией трех углов $\varphi=\alpha-\beta,\ \phi=\beta'-\alpha,\ \theta=\alpha'-\beta'\ \ (\alpha'-\beta=\theta+\phi+\varphi)$:

$$\langle s(\alpha,\alpha',\beta,\beta')\rangle=\cos 2(\theta+\phi+\varphi)-\cos 2\varphi-\cos 2\phi-\cos 2\theta\ .$$

Чтобы показать, что полученное выражение нарушает неравенство Белла, достаточно выбрать все равные три угла в виде: $2\varphi=2\phi=2\theta=\gamma:\langle s(\gamma)\rangle=\cos 3\gamma-3\cos\gamma$. Экстремум функции достигается при $\sin 3\gamma=\sin\gamma$, максимумам и минимумам соответствуют значения $\gamma=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi n$, при которых $\langle s(\gamma)\rangle=\pm2\sqrt{2}$.

На рис. 3 показано нарушение неравенства Белла.

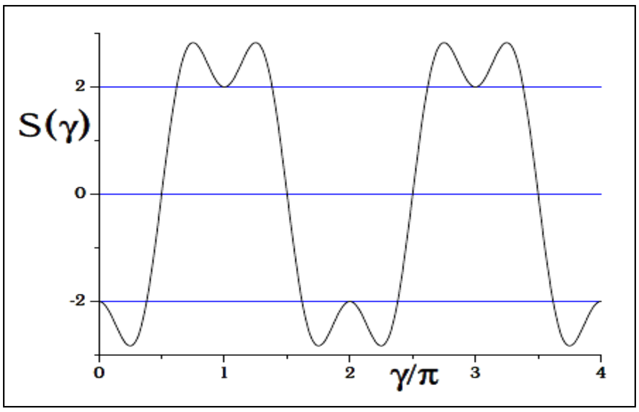


Рис. 3. Поведение наблюдаемой и нарушение неравенства Белла

Начиная с 1972 года нарушение неравенств Белла было неоднократно зарегистрировано в различных экспериментах. Эксперименты по нарушению неравенств Белла показали, что любые попытки интерпретировать ее предсказания при помощи теории скрытых параметров заранее обречены на неудачу. Для того чтобы в рамках классических представлений объяснить нарушение неравенств Белла, необходимо ввести одно из двух предположений: допустить возможность распространения сигнала от первой частицы ко второй со скоростью большей скорости света, либо допустить, что функция распределения вероятностей может принимать отрицательные значения.

С первым из предположений связано представление о «*нелокальной*» теории квантовой механики. Существует альтернативная копенгагенской *многомировая интерпретация* квантовой механики (введено Эвереттом и Де Виттом)[13]. Ее преимуществом является возможность обойтись без постулата редукции – его место занимает предположение о множественности миров и о том, что в момент измерения производится выбор одного из них.

Существуют также дальнейшие попытки объяснить нарушение неравенств Белла с классической точки зрения или обосновать несостоятельность экспериментов по их проверке. Однако надежность предсказаний квантовой механики подтверждается многочисленными экспериментами и не зависит от того, как именно интерпретируется квантовомеханические эффекты[14]. Роль неравенств Белла в задачах оценки мощности и непротиворечивости результатов экспериментальной проверки формальных физических теорий, а также возможности энтропийных моделей соотношений выполнения или нарушения неравенств Белла, а также и их связь с синергизмом извлекаемой из эксперимента информации (знаний) будут рассмотрена в отдельной работе.

На рис. 4 приведена обобщенная функциональная структура создания моделей физических объектов и процессов на различных уровнях описания и применения законов функционирования.

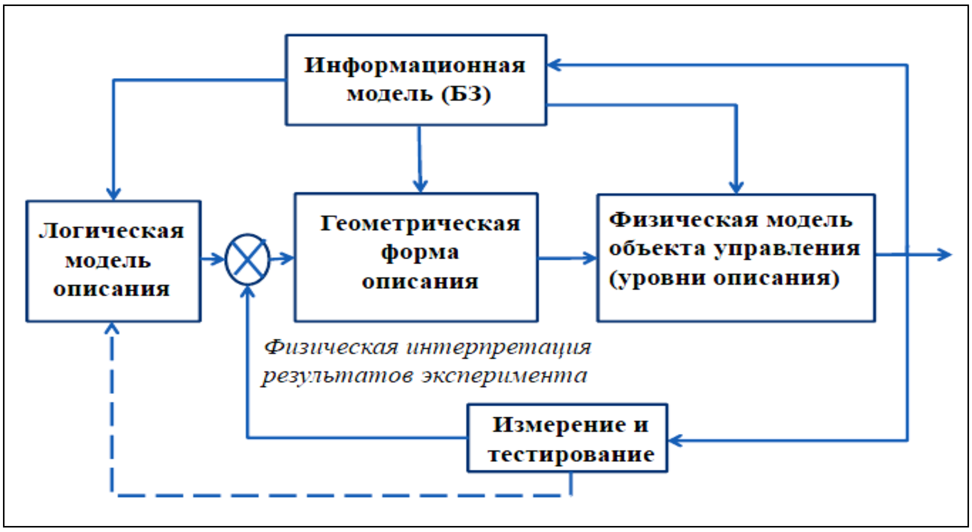


Рис. 4. Функциональная структура создания моделей объектов и процессов

Согласно структуре на рис. 4, обсудим предварительно, прежде всего, некоторые аспекты процессов измерений в физических экспериментах (в блоке «Измерение и тестирование»), а также роль логической и физической интерпретации полученных результатов измерений.

[13]Barrett J. A. and Byrne P. (Eds) The Everett interpretation of quantum mechanics: Collected works 1955 – 1980 with commentary. – Princeton University Press. – 2012.
[14]Stuart T.E., Slater J.A., Colbeck R., Renner R., Tittel W. Experimental bound on the maximum predictive power of physical theories // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 109. – №2. – P. 020402.

Проблема 2: Классическая и квантовая логики интерпретации результатов процессов измерений в физических экспериментах

Физический эксперимент призван для установления проверки адекватности результатов обработки экспериментальных предсказаний, результатам разработанной формальной физической теории, или для разработки самой модели по экспериментальным данным. Здесь имеется ряд принципиальных особенностей, связанных с самим процессом измерений и поведением объекта, подверженного воздействию сил измерительного прибора.

Логически мыслимы три различных типа поведения объектов при измерениях: 1) измерение физической величины с достоверностью дает некоторое значение; 2) результат измерения может быть предсказан только статистически, но характер статистической природы измерения таков, что если за первым измерением выполняется второе, то оно будет обладать некоторым распределением, никак не связанным с первым измерением; 3) результат измерения может быть предсказан только статистически, но последующее измерение дает результат, согласующийся с первым измерением.

Первая возможность соответствует классической физике в том случае, когда можно осуществить тождественность условий эксперимента; вторая возможность соответствует классической физике в том случае, если эксперимент повторяется при нетождественных условиях; третья возможность соответствует классической физике в том случае, когда различие в исходах эксперимента вызывается внутренними причинами.

В квантовой механике первая возможность осуществляется, если волновая функция, описывающая состояние системы, является собственной функцией оператора, соответствующего измеряемой величине; в общем случае в квантовой механике осуществляется третья возможность.

Таким образом, квантовая механика ставит своей задачей определение вероятностных распределений для различных физических величин в различных состояниях микрообъекта.

Коммутирующие друг с другом операторы имеют общие собственные функции. Поэтому соответствующие им величины (называемые совместными) можно с любой степенью точности определять одновременно. Если же операторы не коммутируют, то, согласно принципу неопределенности Гейзенберга, зная точно одну величину, получим для другой величины не точное значение, а некоторое вероятностное распределение, которое не зависит от устройства прибора измерения, а нужно, лишь, чтобы прибор был приспособлен для измерения исследуемой величины и был классическим. Последнее условие означает, что прибор предполагается подчиняющимся классической физике. В качестве прибора могут использоваться и микрообъекты, если они в рассматриваемых условиях допускают квазиклассическое описание.

В отличие от классической теории вероятностей, где случайные величины (которые называются наблюдаемыми) представляются функциями на некотором пространстве, квантовые переменные не допускают подобного представления. Однако существует общая черта для наблюдаемых, связанных с физической системой: возможность производить над ними некоторые алгебраические операции, что дает возможность построить квантовую статистическую теорию на основе алгебраического подхода. Математическим аппаратом, дающим адекватное описание квантовых систем, является теория (некоммутативных) топологических алгебр (в основном C^*-алгебр и алгебр фон Неймана) и их представлений.

В данной работе мы не имеем возможности обсуждать математические детали, поэтому на уровне качественной физике обсудим логику содержательной части проблемы.

При определении различных статистических распределений, относящихся к различным некоммутирующим наблюдаемым, следует иметь ввиду, что недостаточно рассматривать только один коллектив невзаимодействующих между собой тождественных микрообъектов. Такой объект необходим для определения понятия вероятности. Поэтому имеют дело не с одним, а со многими коллективами для различных наблюдаемых, которые нельзя объединить в один.

В квантовой механике микросистемы не состоят из большого числа меньших объектов, взаимодействие между которыми основано только на статистических закономерностях. Здесь следует отметить, что статистические закономерности существуют и в классической физике при сохранении детерминированного механизма. Достаточно напомнить, что всю термодинамику можно рассматривать статистическую механику и по ненаблюдаемым «скрытым» параметрам (координатам и импульсам отдельных атомов) получить все термодинамические свойства макроскопических тел.

Поэтому фон Нейманом был поставлен вопрос и им же был решен вопрос о возможности существования некоторых «скрытых» параметров, которые были бы причиной наблюдаемых статистических закономерностей в поведении отдельных микрообъектов.

Теорема фон Неймана гласит, что квантовая механика является логически замкнутой теорией, в которой нет места для «скрытых» параметров.

Невозможность введения скрытых параметров объясняется различием между квантовой и классическими логиками, каждая из которых ни одна не сводится к другой. Недистрибутивность логики квантовой механики оказывает существенное влияние на построение формальных систем, возникающих при анализе физических теорий[15].

Примечание 2. В данной работе гильбертовым пространством называется совокупность элементов-векторов ψ, φ, . . ., для которых определены операции сложения, умножения на комплексное число и скалярного произведения (φ, ψ). Совокупность векторов ψ_1, $\cdot\psi_2$, …·называется *базисом,* если любой вектор ψ гильбертова пространства можно представить в виде суперпозиции $\psi = \sum_i c_i \psi_i$. В гильбертовом пространстве число линейно независимых векторов бесконечно. При изучении, например, спиновых состояний рассматривают также конечномерное, т. е. евклидово, пространство. Поэтому, строго говоря, рассматривают унитарное пространство, в котором определено скалярное произведение, а число линейно независимых векторов может быть либо бесконечным (в случае гильбертова пространства), либо конечным (в случае евклидова пространства).

Отметим необходимые особенности классической и квантовой логик, а также их различий.

Классическая логика. Под логикой понимается взаимоотношения между высказываниями, т.е. так называемое *исчисление высказываний*. В классической логике каждому высказыванию A может быть сопоставлено некоторое множество Ω_A точек в фазовом пространстве, образованном обобщенными координатами и импульсами динамической системы. Это множество Ω_A называется носителем высказывания A. Допустим, что система характеризуется гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)$. Тогда высказыванию A «энергия частицы равна единицы» соответствует совокупность Ω_A точек фазового пространства, лежащих на окружности $p^2 + q^2 = 2$, а высказыванию B «частица движется в положительном направлении оси q» соответствует в фазовом пространстве полуплоскость $\Omega_B,\ p > 0$.

Напомним некоторые стандартные определения классической логики [22, 23]. Над различными высказываниями классической логики $A, B, C, \ldots$ можно производить операции сложения и умножения. Если даны какие-либо два высказывания A и $B,$ и высказывание C заключается в том, что справедливо хотя бы одно из высказываний A и B, то говорят, что высказывание C есть сумма высказываний A и $B,$ и записывают это соотношение между высказываниями в виде равенства: $C = A + B$. Ясно, что имеют место *коммутативный* закон $A + B = B + A$ и *ассоциативный* закон $(A + B) + C = A + (B + C)$. Если даны высказывания A и B и высказывание C состоит в том, что справедливы оба высказывания A и B, то говорят, что высказывание C есть произведение высказываний A и $B,$ и записывают это отношение между высказываниями в виде равенства $C = AB$. Как для сложения, так и для умножения имеют место коммутативный и ассоциативный законы $AB = B\,A,\ (AB)\,C = A\,(BC)$.

Операция сложения и умножения классической логики представляют собой сложение и умножение носителей соответствующих высказываний:

$$\Omega_{AB} = \Omega_A + \Omega_B,\ \Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B,\ \Omega_{A+B} = \Omega_A + \Omega_B.$$

[15]Ахиезер А.И., Половин Р.В. Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры // Успехи Физических Наук. – 1972. – Т. 107. – Вып. 3. – С. 464-487.

На рис. 5 показаны графически носители высказываний *A* и *B* на плоскости фазового пространства.

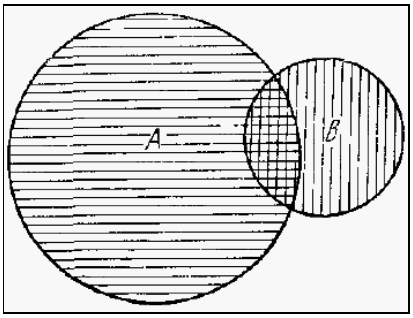
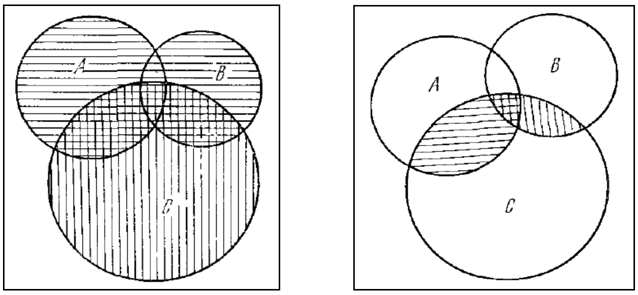


Рис. 5. Носители высказываний A и B на плоскости фазового пространства

Высказыванию *AB* соответствует дважды заштрихованная область, а высказыванию *A* + *B* – область, заштрихованная хотя бы один раз. В классической логике имеет место также дистрибутивный закон: *(A + B) C = AC + BC*.

Этот закон проиллюстрирован на рис. 6. На рис. 6а высказыванию *A* + *B* соответствует горизонтальная штриховка, а высказыванию *C* – вертикальная дважды заштрихованная область.



(а) (б)

Рис. 6. Дистрибутиность логических связок

На рис. 6б высказыванию *AC* соответствует горизонтальная штриховка, а высказыванию *BC* – вертикальная штриховка. Поэтому высказыванию *AC* + *BC* соответствует область, заштрихованная хотя бы один раз. дважды заштрихованная область на рис. 6а совпадает с областью , заштрихованной хотя бы один раз на рис. 6б, что и требует дистрибутивный закон классической логики.

Между *некоторыми* парами высказываний *A, B, C* можно установить *отношение порядка* $A \le B$, означающее, что если высказывание *A* истинно, то высказывание *B* также истинно, иными словами, высказывание *B* является следствием высказывания *A*.

Отношение $A \le B$ означает, что носитель Ω_A высказывания *A* является подмножеством носителя Ω_B высказывания *B*: $\Omega_A \subseteq \Omega_B$. Например, высказывание *B* «$p > 0$» является следствием высказывания *C* «$p > 1$»: $C \le B$. Напротив, между высказываниями *A* «$p^2 + q^2 = 2$» и *B* «$p > 0$» нельзя установить отношение порядка, так как ни одно из них не является следствием другого.

Отношение порядка очевидно связано с операциями сложения и умножения высказываний законами *упорядочения*: $A + B \ge A,\quad AB \le A$ и законами *поглощения*:

Если $A \le B$, то $A + B = B,\quad AB = A$.

Квантовая логика. В *квантовой логике*, основные принципы которой были сформулированы Биркгофом и фон Нейманом [24], каждому высказыванию *A* соответствует некоторое линейное подпространство L_A гильбертова пространства. Например, высказыванию *A* «энергия атома равна E_n» соответствует при отсутствии вырождения некоторый ненормированный вектор ψ в гильбертовом пространстве, т. е. носителем этого высказывания является прямая $L_A : \psi = C\psi_n \quad \left((\psi_n, \psi_n) = 1 \right)$ в гильбертовом пространстве. В случае двукратного вырождения носителем высказывания A является плоскость L_A в гильбертовом пространстве: $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, $(\psi_1, \psi_1) = 1$, $(\psi_2, \psi_2) = 1$, где c_1, c_2 - произвольные числа. В квантовой логике, так же как и в классической логике, может быть построено исчисление высказываний, основывающееся на операциях сложения, умножения и отношении следования. При этом операция умножения и отношение следования индуцируют такие же отношения между носителями высказываний $L_{AB} = L_A L_B$: если $A \le B$, то $L_A \subseteq L_B$, как и в классической логике.

Что же касается операции сложения, то ей соответствует не теоретико-множественная сумма $L_A + L_B$ носителей отдельных слагаемых L_A и L_B, а прямая сумма $L_A \oplus L_B$ этих линейных пространств:

$$L_{A+B} = L_A \oplus L_B \ne L_A + L_B .$$

Примечание 3. Прямой суммой пространств L_A и L_B называется совокупность всевозможных сумм векторов $x + y$, где $x \in L_A$, $y \in L_B$. Например, если L_A и L_B означают соответственно оси x и y, то теоретико-множественная сумма $L_A + L_B$ состоит из всех векторов, направленных либо вдоль оси x, либо вдоль оси y. Прямая же сумма $L_A \oplus L_B$ состоит из всех векторов, лежащих в плоскости x, y.

Пример 1. Пусть, например, высказывание A состоит в том, что вектор магнитного момента атома μ направлен вдоль оси x, а высказывание B состоит в том, что этот вектор направлен вдоль оси y. Тогда высказывание AB состоит в том, что вектор μ направлен и вдоль оси x, и вдоль оси у, что невозможно. Такое высказывание, которое заведомо ложно, называется *абсурдным* и обозначать через Θ. Таким образом, в рассматриваемом случае $AB = \Theta$.

Пример 2. Высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ имеет вид $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$, где μ_1 и μ_2 направлены соответственно вдоль осей x и у. Иными словами, высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ лежит в плоскости x, y (заметим, что в классической логике высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ направлен либо вдоль оси x, либо вдоль оси y). В случае двумерного пространства высказывание $A + B$ заведомо истинно. Такое заведомо истинное высказывание называется тривиальным и обозначается через I.

Очевидно, что как в классической, так и в квантовой логике справедливы соотношения:

$$\Theta A = \Theta,\ \ \Theta + A = A,\ \ IA = A,\ \ I + A = I,\ \ \Theta \le A \le I ,$$

где A – любое высказывание.

Примечание 4. В квантовой логике справедливы также коммутативный и ассоциативный законы, закон упорядочения и закон поглощения. Что же касается дистрибутивного закона, то он в квантовой логике, вообще говоря, не имеет места. Данное свойство отражает новые (необычные) явления в квантовой механике типа некоммутативности переменных, неопределенности и невозможности одновременного точного измерения наблюдаемых и др. В результате необычные явления для классической физики, такие как запутанные состояния (entanglement), телепортация, сверхплотное кодирование, квантовая криптография, приводят к «парадоксам» и трудностям физической интерпретации с позиции логики классической физики.

Отметим данные особенности квантовой логики более подробно.

Как уже отмечалось, в классической логике выполняются законы коммутативности, ассоциативности, упорядоченности, поглощения и имеет место дистрибутивный закон $(A + B)C = AC + BC$. Между *некоторыми* парами высказываний $A, B, C, \ldots$ можно установить отношение порядка $A \le B$ означающее, что если высказывание A истинно, то высказывание B также истинно, или высказывание B является следствием высказывания A. В квантовой логике также выполняются коммутативный и ассоциативный законы, закон упорядочения и закон поглощения. Однако закон дистрибутивности в квантовой логике, в общем случае, не выполняется. Таким образом, в компактной форме аксиомы квантовой логики можно записать на языке ортомодулярной решетки в следующем виде: квантовая логика определяется как полная ортомодулярная решетка с семью базовыми элементами [24-32]:

$$l = \{L, \le, \wedge, \vee, \perp, 0, 1\},$$

где имеем следующую конструкцию:

(а) $\{L, \leq, \wedge, \vee, \perp, 0, 1\}$ – полная решетка, 0 и 1 наименьший и наибольший элементы решетки L соответственно, $\leq$ означает частичное упорядочение на L, и для некоторого $M \subseteq L$, $\wedge M$ и $\vee M$ имеем нижнюю и верхнюю границу для *M*, соответственно;

(б) унарная операция $\perp$ называется ортодополнением и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\forall a, b \in L \quad a \wedge a^{\perp} = 0, \;\; a \vee a^{\perp} = 1, \;\; a^{\perp\perp} = a, \;\; a \leq b \;\; \rightarrow \;\; b^{\perp} \leq a^{\perp}, \;\; a \wedge \left(a^{\perp} \vee (a \wedge b)\right) \leq b .$$

(в) оператор импликации: стрела Сасаки $a \rightarrow b \equiv a^{\perp} \vee (a \wedge b)$ для некоторых $a, b \in L$ имеет свойство $a \leq b$ если и только если $a \rightarrow b = 1$.

(г) двойная импликация: $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Пример 3. Особенности квантовой логики вычислений. Чтобы убедится в этом, рассмотрим три вектора A, B, C в двумерном евклидовом пространстве (рис. 7). Высказывания A, B è C, состоят в том, что вектор ψ направлен вдоль соответствующего вектора.

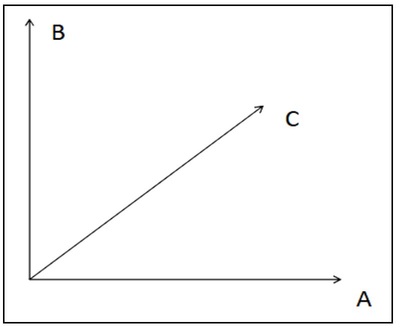


Рис. 7. Векторы A, B, C в двумерном евклидовом пространстве

Объединение векторов $A \cup B = \grave{A} + B$ накрывает все пространство и вектор ψ обязательно направлен вдоль некоторого вектора *C*. С точки зрения логики высказываний имеем

$$A + B = I, \left(A + B = I\right)C = C = \psi .$$

Однако, вектор ψ геометрически не может быть направлен в плоскости вдоль произведения отдельных векторов, т.е. с точки зрения логики высказываний $A \cap C = AC = \theta, B \cap C = BC = \theta$, где θ – абсурдное высказывание. Поэтому $AC + BC = \theta$.

Таким образом, дистрибутивный закон не выполняется: $(A + B)C \neq AC + BC$.

Нарушение дистрибутивности составляет основное отличие квантовой логики.

Наличие данной особенности отличает квантовую логику от Аристотелевой логики.

Основным объектом квантовой логики являются решетки. Допустим, что состояния некоторой системы описываются решеткой (рис. 8).

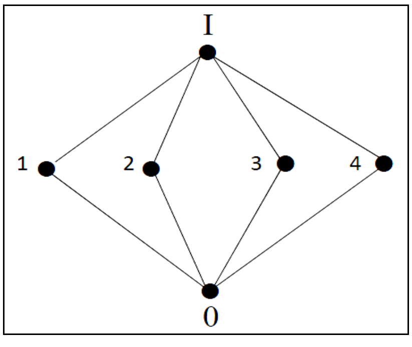


Рис. 8. Вид недистрибутивной решетки

На рис. 8 состояние 0 означает «никакое» или «ложное», состояния 1, 2, 3, 4 являются взаимоисключающими друг друга состояниями, так что состояние 1 и 2 (обозначение $1 \wedge 2$) есть 0; аналогично $1 \wedge 3 = 1 \wedge 4 = 2 \wedge 3 = 0$. I – всегда реализующееся состояние $\mathrm{I} = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4$, где $\vee$ – знак дизъюнкции, и $1 \vee 2 = 1 \vee 3 = 2 \vee 3 = 3 \vee 4 = \mathrm{I}$.

Нетрудно заметить, что решетка на рис. 8 недиструбутивна:

$$1 \wedge (3 \vee 4) = 1 \wedge \mathrm{I} = 1 \neq (1 \wedge 3) \vee (1 \wedge 4) = 0 \vee 0 = 0 .$$

Другой важной особенностью данной решетки является невозможность определения на ней вероятностной меры [25, 26]. Действительно, если все состояния равноправны, то естественно приписать любому из состояний 1, 2, 3, 4 вероятность ¼, но тогда вероятность состояния $1 \vee 2$ по теореме сложения вероятностей есть ½, однако $1 \vee 2 = \mathrm{I}$, и, следовательно, эта вероятность равна 1. Поэтому в квантовой механике поведение динамической системы описывается не вероятностью, а амплитудой вероятности, которая, в свою очередь, позволяет вычислять условные вероятности.

Проблема 3: Процессы и формальные системы интерпретации результатов измерения

Согласно Гейзенбергу[16], процесс измерения разделяется на два строго различных этапа.

Первый этап измерения состоит в том, что система подвергается внешнему, физически реальному, изменяющему ход событий воздействию, например, производится освещение светом или включение поля. Это воздействие приводит к тому, что наблюдаемая система переходит в «смесь» состояний, вообще говоря, бесконечно многих.

Второй этап измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное, как действительно реализованное состояние.

Этот второй этап представляет собой процесс, который сам не воздействует на ход событий, но который только изменяет наше знание реальных соотношений.

Таким образом, после первого этапа процесса измерения, заключающегося во взаимодействии микрообъекта с прибором, исходное чистое состояние ψ разрушается и вместо него возникает *смесь,* описываемая не волновой функцией, а статистическим оператором. Во втором этапе процесса измерения регистрирующее устройство позволяет разделить смесь на чистые состояния, описываемые собственными функциями φ_n измеряемой величины *R*. Если в каком-либо из таких состояний φ_n снова измерять наблюдаемую *R,* то мы уже не будем получать разброса ее значений, а получим вполне определенное значение – собственное значение r_n наблюдаемой, соответствующее рассматриваемому состоянию φ_n

Собственные значения операторов интерпретируются в квантовой механике как совокупности возможных значений соответствующих наблюдаемых. Это означает, что измерение какой-либо величины с помощью подходящего для этой цели устройства (оно называется *прибором)* будет давать одно из собственных значений оператора, соответствующего рассматриваемой наблюдаемой. При этом, как правило, мы получим в различных опытах различные значения, и речь может идти только об определении вероятности обнаружения того или иного собственного значения наблюдаемой (в исследуемом состоянии микрообъекта). Найти это распределение вероятностей проще всего в том случае, когда состояние микрообъекта является чистым.

В этом случае вектор состояния вплоть до момента измерения наблюдаемой изменяется по строго определенному закону. Коммутирующие друг с другом операторы имеют общие собственные функции. Поэтому соответствующие им величины (мы будем называть такие величины *совместными)* можно с любой степенью точности определять одновременно.

[16] Гейзенберг В., Физические принципы квантовой теории. – М.–Л.: ГТТИ, 1932. – С. 48-51.

Если же операторы не коммутируют, то, зная точно одну величину (т. е. рассматривая состояние с определенным значением этой величины), мы получим для другой величины не точное значение, а некоторое статистическое распределение, которое никак не зависит от устройства прибора – нужно лишь, чтобы прибор был приспособлен для измерения интересующей нас величины и был классическим. Последнее условие означает, что прибор предполагается подчиняющимся законам классической физики (точнее говоря, достаточно предполагать, что прибор описывается на квазиклассическом уровне).

Это не значит, что в качестве приборов должны обязательно использоваться макроскопические тела и не могут использоваться микрообъекты.

Напротив, в качестве приборов могут использоваться и микрообъекты, если они в рассматриваемых условиях допускают квазиклассическое описание.

Если же они не квазиклассичны, то достижимая с помощью таких приборов точность при измерении соответствующих величин принципиально не может быть достаточно большой; она будет тем меньше, чем больше их «квантовость», т. е. чем больше они отклоняются по своим свойствам от классических объектов.

При определении различных статистических распределений, относящихся к различным некоммутирующим наблюдаемым, следует иметь в виду, что для этого недостаточно рассматривать только один коллектив невзаимодействующих между собой тождественных микрообъектов. Такой коллектив, конечно, необходим (для определения понятий вероятности), но он должен быть снабжен соответствующим измерительным «снаряжением», различным для различных наблюдаемых. Поэтому имеем дело не с одним, а со многими коллективами для различных наблюдаемых, а так как эти «снаряжения» для некоммутирующих наблюдаемых несовместимы между собой, рассматриваемые коллективы нельзя объединить в один коллектив.

Эксперимент и его интерпретация Выше утверждалось, что процесс измерения разделяется на две стадии: взаимодействие квантового объекта с прибором, в результате которого из чистого состояния возникает смесь, и акт регистрации, в результате которого из смеси возникает чистое состояние.

Пример 4. Пучок возбужденных атомов, движущихся в сильно неоднородном магнитном поле H_y. Чтобы разъяснить обе эти стадии, рассмотрим, следуя Гейзенбергу, пример на рис. 9.

Если магнитный момент атома в *n*-м состоянии равен μ_n, то энергия взаимодействия атома с полем будет равна $E_n = \mu_n H_y(y)$, а сила, действующая на атом, $-\mu_n dH_y(y)/dy$. Так как различным состояниям атома соответствуют значения магнитного момента, то пучок расщепится. Угол отклонения будет равен $\alpha_n = (dE_n/dy)T/p_x$, где T – пролетное время, а p_x – импульс атомов пучка в направлении движения. Используя соотношение неопределенности, можно найти естественный разброс направлений пучка: $\Delta\alpha \sim \lambda/d = h/p_x d$, где d – ширина пучка. Чтобы можно было детектировать отклонение пучка, должно выполняться неравенство $\alpha_n \gg \Delta\alpha$, или $(dE_n/dy)Td \gg h$. С другой стороны, фаза ψ - функции атома в *n*-м состоянии равна $\varphi_n = -(2\pi E_n/h)t$. Поэтому неопределенность фазы в пучке $\Delta\varphi_n = (d\varphi_n/dy)d$ будет $\Delta\varphi_n \sim (2\pi/h)T(dE_n/dy)d$, т.е. $\Delta\varphi_n \gg 2\pi$.

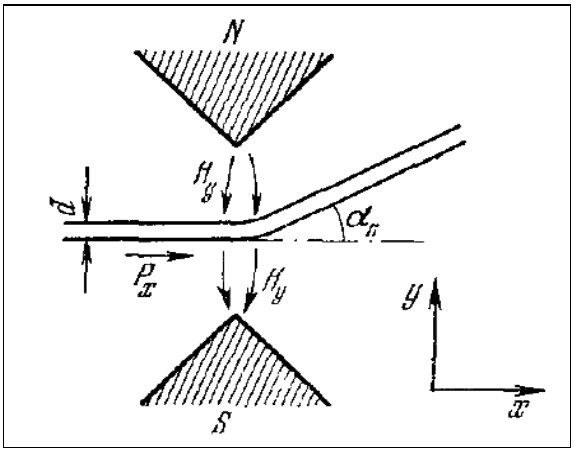


Рис. 9. Пучок возбужденных атомов в сильно неоднородном магнитном поле

Таким образом, в результате измерения возникает полная *неопределенность фазы*, иными словами, полностью нарушаются фазовые соотношения между атомами. В этом именно и состоит «неконтролируемое взаимодействие» между измерительным прибором и измеряемым объектом.

Если не учитывать этого физического взаимодействия, то можно прийти к парадоксам.

В связи с этим рассмотрим еще один пример.

Пример 5. Рассмотрим, например, пучок возбужденных атомов, проходящий через два неоднородных магнитных поля H_1 и H_2 (рис. 10).

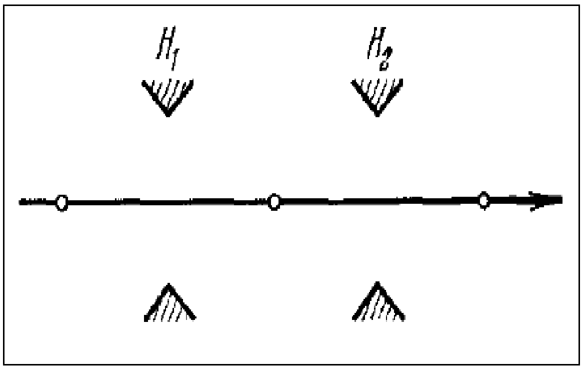


Рис. 10. Пучок возбужденных атомов, проходящий через два неоднородных магнитных поля

Пусть пучок перед входом в поле H_1 содержит только атомы, находящиеся в состоянии *n.* Через $A^{(1)}_{n\to m}$ обозначается амплитуда перехода атома из состояния *n* в состояние *m* под влиянием поля H_1. Тогда вероятность найти атом в состоянии *m* после прохождения поля H_1 будет равна $\left|A^{(1)}_{n\to m}\right|^2$. Если, далее, $A^{(2)}_{m\to l}$ – амплитуда перехода атома из состояния *m* в состояние *l* под влиянием поля H_2, то вероятность найти атом в состоянии *l* после прохождения поля H_2 при условии, что перед входом в поле атом находился в состоянии *m,* будет равна $\left|A^{(2)}_{m\to l}\right|^2$.

Поэтому вероятность того, что атом находится в состоянии *l* после прохождения обоих полей H_1 и H_2, должна равняться

$$P_{n\to l} = \sum_m \left|A^{(1)}_{n\to m}\right|^2 \left|A^{(2)}_{m\to l}\right|^2, \tag{2}$$

где суммирование осуществляется по всем промежуточным состояниям *m*.

С другой стороны, если рассматривать поля H_1 и H_2 как единое поле $H_{12} = H_1 + H_2$, то амплитуда перехода атома из состояния *n* в состояние *l* под воздействием поля H_{12} должна определяться по формуле: $A^{(12)}_{n\to l} = \sum_m A^{(1)}_{n\to m} A^{(2)}_{m\to l}$ и поэтому вероятность того, что атом находится в состоянии *l* после прохождения поля H_{12}, должна равняться:

$$\left|A^{(12)}_{n\to l}\right|^2 = \left|\sum_m A^{(1)}_{n\to m} A^{(2)}_{m\to l}\right|^2. \tag{3}$$

Но эта величина не равна $P_{n\to l}$.

Возникшее противоречие исчезает, если учтем, что формулы (2) и (3) относятся в действительности к двум различным экспериментам.

Выражение (2) справедливо, если между H_1 и H_2 производится опыт, позволяющий определить стационарное состояние атома. При таком опыте неизбежно изменяется на неопределенную величину фаза шрёдингеровской волны, относящейся к *m*-му состоянию, и, следовательно, каждый член $A^{(1)}_{n\to m}$, $A^{(2)}_{m\to l}$ под знаком суммы (3) должен быть умножен на фазовый множитель $\exp\{\pm i\chi_m\}$ с неизвестной фазой χ_m, по которой все выражение должно быть усреднено. В результате такого усреднения формула (3) перейдет в формулу (2).

Если же промежуточного опыта, позволяющего определить состояние атома между H_1 и H_2 не было, то результат конечного опыта дается формулой (3). Формула (2) в этом случае неправильна, так как бессмысленно утверждение о том, что между H_1 и H_2 атом находится в определенном состоянии *m*.

Таким образом, следует строго различать три опыта:

Опыт 1. Между H_1 и H_2 атомы не испытывают возмущения. Вероятность найти атом в состоянии *l* после прохождения поля H_2 будет $\left|\sum_m A^{(1)}_{n\to m} A^{(2)}_{m\to l}\right|^2$.

Опыт 2. Между H_1 и H_2 имеет место некоторое воздействие на атомы, позволяющее определить их стационарное состояние, но результат измерения не регистрируется. В этом случае возникает «смесь», и вероятность найти атом в состоянии *l* после прохождения поля H_2 будет $\sum_m \left|A^{(1)}_{n\to m}\right|^2 \left|A^{(2)}_{m\to l}\right|^2$.

Опыт 3. Между H_1 и H_2 атомы испытывают воздействие, позволяющее определить их стационарные состояния, и результат измерения регистрируется. Вероятность найти атом после прохождения H_2 в состоянии *l* будет при этом равна $\left|A^{(2)}_{m\to l}\right|^2$.

Различие между случаями второго и третьего опытов следует из классической теории.

Принципиальное различие между случаями первого и второго опытов образует, с соответствующим обобщением, центральный пункт квантовой механики.

Объясняется данный «парадоксальный» факт тем, что в квантовой механике при оценке эволюции вероятности квантовых переходов осуществляется по законам сложения *амплитуд вероятностей* по всем возможным путям траекторий движения, а не самих вероятностей. Амплитуда вероятностей может быть уменьшена (деструктивная интерференция) или усилена (конструктивная интерференция) в процессе суммирования амплитуд вероятностей, что существенно отличает квантовые операции от классических вероятностных операций.

Поясним подробнее данный факт. Можно образовать два комплексных числа – амплитуды вероятностей $A_1(x)$ и $A_2(x)$ прохождения электрона соответственно через щели *A* и *B* соответственно с последующим попаданием в $C(x)$. По определению, полная амплитуда вероятности попадания в $C(x)$, которую обозначим через $A(x)$ равна сумме амплитуд, соответствующих всем взаимоисключающим путям. В рассматриваемом случае $A(x)=A_1(x)+A_2(x)$. Знание амплитуды позволяет найти вероятность $f(x)dx=\left|A(x)\right|^2 dx$. Поток электронов около точки C и количество фото событий за единицу времени пропорциональны плотности вероятности $f(x)$. Тогда из двух предыдущих формул следует:

$$f(x)=\left|A_1(x)\right|^2+\left|A_2(x)\right|^2+2\,\mathrm{Re}\left[A_1^*(x)A_2(x)\right], \tag{4}$$

где знаки Re и * отвечают, соответственно, выделению действительной части комплексного числа и операции комплексного сопряжения. Классическое описание ограничивалось бы первыми двумя слагаемыми в (4), определяющими вероятность прохождения либо через первую щель, либо через вторую. Квантовая механика вводит третье слагаемое, зависящее от фаз; именно соотношение фаз $A_1(x)$ и $A_2(x)$ позволяет дать адекватное описание интерференции микрочастиц.

Наличие этих дополнительных членов описывает явление интерференции вероятностей, отсутствующее в классической физике. Если бы интерференция вероятностей имела место для классических объектов, то возникали бы парадоксальные ситуации.

Приведем теперь простое доказательство невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику, опирающееся на квантовую логику (оно принадлежит Тернеру[17]).

Пример 6. Если бы существовали скрытые параметры, образующие фазовое пространство Ω, то существовало бы отображение $\Omega_A \to L_A$ носителей каждого высказывания *A*. Иными словами, можно было считать, что векторы состояний ψ, дополненные скрытыми параметрами ξ, образуют некоторое фазовое пространство Ω. С другой стороны, отображение $\Omega_A \to L_A$ должно очевидно сохранять отношение следования *(постулат изотонности):* $\Omega_A \subseteq \Omega_B$ равносильно $L_A \subseteq L_B$.

Поэтому, чтобы доказать невозможность введения скрытых параметров, достаточно показать невыполнение постулата изотонности. Рассмотрим с этой целью четыре направления 1, 2, 1', 2', лежащих в одной плоскости (см. рис. 11) унитарного пространства.

Пусть этим направлениям соответствуют четыре квантовомеханических вектора состояния $\psi_1,\psi_2,\psi_{1'},\psi_{2'}$. Введем, далее, суперпозиции состояний:

$$\psi_{12}=c_1\psi_1+c_2\psi_2,\quad \psi_{1'2'}=c_{1'}\psi_{1'}+c_{2'}\psi_{2'}$$

Так как четыре направления 1, 2, 1', 2' лежат в одной плоскости, то $\psi_{12}=\psi_{1'2'}$. На языке квантовой логики это означает равенство прямых сумм

$$L_1\oplus L_2=L_{1'}\oplus L_{2'}, \tag{5}$$

где $L_1,L_2,L_{1'},L_{2'}$ означают линейные подпространства 1, 2, 1', 2'.

Из формулы (5) следует, что $L_1\subseteq L_1\oplus L_2$. Пусть теперь существуют скрытые параметры ξ. Тогда вектору состояния ψ_1 и параметру ξ должно соответствовать некоторое фазовое подпространство Ω_1 $\{\psi_1,\xi\}\in\Omega_1$ и аналогично $\{\psi_2,\xi\}\in\Omega_2,\{\psi_{1'},\xi\}\in\Omega_{1'},\{\psi_{2'},\xi\}\in\Omega_{2'}$.

[17]Turner J. E. Violation of the quantum ordering of propositions in hidden-variable theories // J. Math. Phys. – 1968. – Vol. 9. – №9. – Pp. 1411-1415.

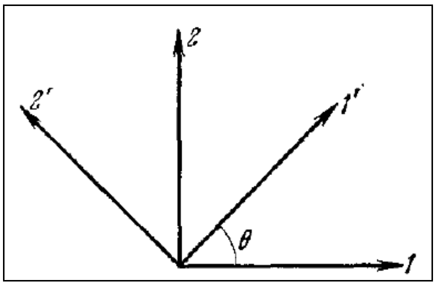


Рис. 11. Вектора в плоскости

Возьмем теперь суперпозицию состояний $\psi_{12} = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Тогда должно иметь место соотношение $\{\psi_{12}, \xi\} \in \Omega_1 + \Omega_2$.·Подчеркнем, что в это соотношение входит не прямая сумма, а теоретико-множественная, так как скрытые параметры по самой идее их введения должны подчиняться исчислению высказываний классической логики. Поскольку высказывания $\Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_{1'} + \Omega_{2'}$ не равносильны $\Omega_1 + \Omega_2 \neq \Omega_{1'} + \Omega_{2'}$, то имеет место отношение $\Omega_{1'} \subseteq \Omega_1 + \Omega_2$, и, следовательно, постулат изотонности не выполняется. Таким образом, структура квантовой логики не может быть изоморфна структуре классической логики.

Сравнение ситуаций, возникающих при описании квантовых систем, с классической статистической физикой выясняет причины выявленной недистрибутивности логики квантовой механики. С этой целью строится погружающая операция, сопоставляющая каждой формуле элементарной теории структур формулу классического исчисления предикатов. В теориях классической физики экспериментальные утверждения образуют булеву алгебру, благодаря наличию постулата об одновременной проверяемости любой пары таких утверждений: каковы бы ни были наблюдаемые a, b, существует эксперимент ρ, результатом которого является измерение значений этих наблюдаемых с любой степенью точности. Этот постулат заведомо не выполняется в квантовой механике.

Пример 7. Формальные системы, возникающие при анализе физических теорий с точки зрения квантовой и классической логик. Рассмотрим физическую систему σ. Пусть A – наблюдаемая этой системы, E – борелевское множество на вещественной прямой; формулы вида $A \in E$ называются экспериментальными утверждениями. Допустим, что a, b – экспериментальные утверждения; согласно ранее введенным определениям отношение $a \leq b$ (*а* влечет *в*), если всякий раз, когда имеет место *а*, имеет место *в*.

Частично упорядоченное множество экспериментальных утверждений называется логикой системы σ. Формализуем данную ситуацию.

Определения и обозначения формальной системы Рассмотрим исчисление предикатов с тремя постоянными двуместными предикатами $R_1(a,\rho), R_2(\psi,\rho), Q(a,\rho)$, предметными переменными трех сортов $a, b, c, a_1, \ldots$ (переменные для экспериментальных утверждений), $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ (переменные для нумерации экспериментов над системой), $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$ (переменные для описания состояний системы), равенством для переменных $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$ и двумя контактами 0, 1 того же типа, что и переменные $a, b, c, a_1, \ldots$

Содержательный смысл предикатов Опишем содержательный смысл предикатов

- $R_1(a,\rho)$: в результате эксперимента ρ получаем ответ на вопрос, имеет ли место утверждение *а*;
- $R_2(\psi,\rho)$: эксперимент ρ проводится в момент, когда система находится в состоянии ψ;
- $Q(a,\rho)$: результат эксперимента ρ состоит в том, что утверждение *а* выполняется.

Обозначим логические отношения между введенными предикатами и переменными в виде:

$$P(a,\psi) \rightleftharpoons \forall\rho,\ R(a,\psi,\rho) \supset Q(a,\rho);\quad R(a,\psi,\rho) \rightleftharpoons R_1(a,\rho)\,\&\,R_2(\psi,\rho);$$

$$a \le b \rightleftharpoons \forall\psi P(a,\psi) \supset P(b,\psi);\quad a = b \rightleftharpoons a \le b\,\&\,b \le a.$$

В характерной для классической физики ситуации простая аксиоматика приводит к булевой алгебре экспериментальных утверждений.

Рассмотрим аксиоматику классической физики.

Список аксиом для классической физики[18]:

1. $\forall ab\exists\rho\quad R_1(a,\rho)\,\&\,R_1(b,\rho)$;
2. $\forall\rho\quad \big((R_1(a,\rho)\,\&\,R_1(b,\rho)) \supset \mathrm{Q}(a,\rho)\big) \supset \forall\rho\big(R_1(a,\rho) \supset \mathrm{Q}(a,\rho)\big)$;
3. $Q(a \cap b,\rho) \equiv Q(a,\rho) \wedge Q(b,\rho)$;
4. $Q(a \cup b,\rho) \equiv Q(a,\rho) \vee Q(b,\rho)$;
5. $Q(a',\rho) \equiv \neg QQ(a,\rho)$;
6. $\forall\rho\big(\neg Q(0,\rho) \wedge Q(1,\rho)\big)$;
7. $\forall\rho\ \exists\psi R_2(\psi,\rho)$;
8. $a \le b \supset b' \le a'$;
9. $R_1(a,\rho) \equiv R_1(a',\rho)$.

Приведем содержательную интерпретацию аксиом классической физики.

Основной является аксиома 1, в которой формализуется постулат об одновременной проверяемости любой пары экспериментальных утверждений.

Аксиома 2 – это принцип взаимной независимости различных экспериментов друг от друга.

В аксиомах 3 – 6 на множестве экспериментальных утверждений определяются операции $\cap, \cup, '$; отношение $\le$ было ранее введено в обозначениях.

Аксиома 7 утверждает, что при каждом измерении физическая система находится в каком-нибудь состоянии (с физической точки зрения это тривиальное утверждение).

Аксиома 8 менее тривиальна; при вероятностной интерпретации статистической физики эта аксиома сводится к следующему утверждению:

$$\forall\psi\ \ p_\psi(a) = 1 \supset p_\psi(b) = 1 \supset \forall\psi\ \ p_\psi(b) = 0 \supset p_\psi(a) = 0\,,$$

где $p_\psi(a)$ – вероятность того, что в состоянии ψ имеет место *a*.

Данное утверждение имеет место, так как посылка и заключение эквивалентны заключению $\lambda(a) \subseteq \lambda(b)$, где через $\lambda(a)$ обозначена область фазового пространства, состоящая из точек для которых имеет место *a*.

Из аксиом 1-5 следует следующее предложение.

Предложение 1. Множество экспериментальных утверждений, частично упорядоченное отношением $\le$, является булевой алгеброй. Операции $\cap, \cup, '$ согласованы с отношением $\le$ в смысле теории структур.

[18] Мороз Б.З. Формальные системы, возникающие при анализе физических теорий // ДАН СССР. – 1971. – Т. 198. – № 5. – С. 1018-1020.

Здесь следует отметить одну важную особенность формальной системы аксиоматического описания поведения классической системы на фазовом пространстве. В приведенной выше аксиоматике предполагается точное измерение положения точки фазового пространства, а сам процесс измерения не включен в систему формализованного вывода о поведении системы.

Фазовые логики пространства состояний системы[19,20] в логике рассуждений учитывают влияние процессов измерения на точность определения точки фазового пространства. В результате описание формальной системы подчиняется уже не Булевой логике.

В этом случае рассматривается аксиоматика неразличимости состояний системы следующим образом.

Определение 1. Два состояния S и S' неразличимы в открытых множествах если для каждого открытого множества A, $S \cap A$ не пусто тогда и только тогда, когда $S' \cap A$ не пусто.

Определение 2. Два состояния S и S' неразличимы в открытых множествах, если для каждого открытого множества A, $S \subseteq A$ не пусто тогда и только тогда, когда $S' \subseteq A$.

Физически означает, что измерение локализует положение точки фазового пространства в окрестности локального открытого множества. Тогда два множества эквивалентны, если они неразличимы в смысле определения 1 или 2. В первом случае два множества S и S' эквивалентны, если и только если $\overline{S} = \overline{S}'$, т.е. дополнения замкнутых множеств эквивалентны. Во втором случае два множества S и S' эквивалентны, если и только если $\operatorname{int} S = \operatorname{int} S'$, т.е. границы внутренних элементов множеств эквивалентны. В этом случае имеем «замкнутую» и «открытую» логики фазового пространства положения точки соответственно. Следствием таких логик является нарушение закона противоречия в замкнутой логике фазового пространства или закона исключения третьего (*tertium non datur*) в открытой логике фазового пространства.

Пример 8. Рассмотрим операцию отрицание $\neg$ в замкнутой логике фазового пространства. Ясно, что $\neg 1 = 0$ и $\neg 0 = 1$. Но отношение $\neg(\neg A) = A$ уже не справедливо. Допустим, что задано множество *X* в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ и допустим, что $A = \left[\left\{(0, y) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}\right]$, т.е., A является классом всех подмножеств $\mathbb{R}^2$, которые замкнуты относительно оси y . Тогда:

$$\neg A = \left[\left\{(x, y) \middle| x \neq 0\right\}\right] = \left[\overline{\left\{(x, y) \middle| x \neq 0\right\}}\right] = [X] = 1 .$$

Но $\neg(\neg A) = \neg 1 = 0$, и поэтому $\neg(\neg A) \neq A$. В этом случае справедливо утверждение A «включает» $\neg(\neg A)$ в следующем смысле. Если обозначить $A \sqsubseteq B$ если $\overline{A}_{\mu} \subseteq \overline{B}_{\nu}$ и $\sqsubseteq$ означает множество включений канонического представления предложения. Тогда $\neg(\neg A) \sqsubseteq A$. Если опять рассмотреть фазовое пространство $\mathbb{R}^2$ и предложение, что *A* является классом эквивалентности замкнутого относительности оси y , то $\neg A = 1$ и $A \wedge \neg A = A \wedge 1 = A \neq 0$, т.е. закон противоречия также не выполняется.

В результате закон *противоречия* в замкнутой логике фазового пространства не выполняется, т.е., для топологического пространства закон противоречия высказываний $A \wedge \neg A \neq 0$ не выполняется, но выполняется закон исключения третьего $A \vee \neg A = 1$.

Таким образом, можно закон де Моргана для высказываний *A* и *B* в замкнутой логике фазового пространства записать в следующем виде:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \sqsubseteq \neg A \wedge \neg B .$$

---

[19] Westmoreland M.D., Schumacher B. W. Non-Boolean derived logics for classical systems // Physical Review. – 1993. – Vol. A 48. – №2. – Pp. 977-985.

[20] Westmoreland M.D., Krone J., Schumacher B. W. Analysis of billiard ball computation using phase space logics // Physica. – 1993. – Vol. D 120. – №1. – Pp. 236-252.

Во втором отношении равенство может не выполнятся.

В соответствии с принципом дуальности между обоими логиками, в открытой логике фазового пространства, наоборот, не выполняется закон исключения третьего, но выполняется закон противоречия.

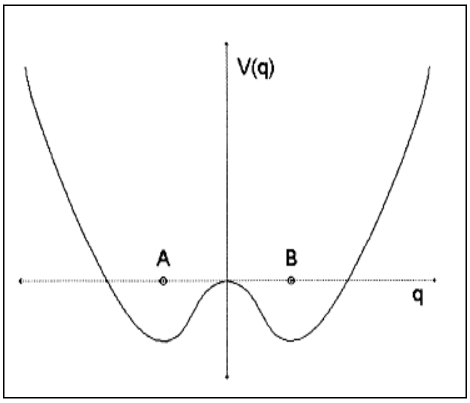
Таким образом, существует широкий класс физических теорий классических объектов с не Булевой логикой интерпретации экспериментальных высказываний.

В соответствии с принципом дуальности между обоими логиками в открытой логике фазового пространства не выполняется закон исключения третьего, но выполняется закон противоречия.

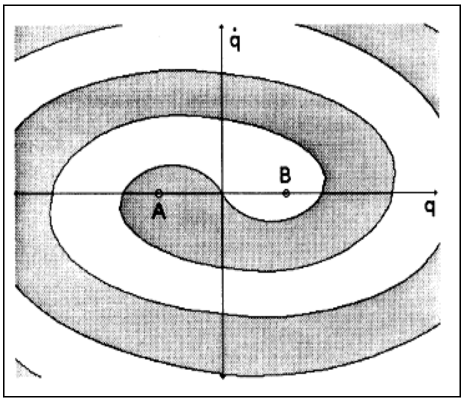
Пример 9. Рассмотрим фазовое пространство динамической системы с потенциалом $V(q)=\frac{1}{4}q^4-\frac{1}{2}q^2$ (рис. 12а) вида:

$$\frac{d}{dt}q=\dot{q},\quad \frac{d}{dt}\dot{q}=-q^3+q-\gamma\dot{q}\,. \tag{6}$$

Фазовый портрет системы показан на рис. 12б.



(а)



(б)

Рис. 12. Вид потенциала (а) и фазовый портрет системы (6)

Существуют три точки равновесия системы (6): точка $q=0$ и точки A (при $q=-1$) и B (при $q=+1$). Помимо седловой точки $q=0$ существуют аттракторы в точках A и B (рис. 12б). Последнее означает, что состояния, близкие к точкам A и B, стремятся к ним асимптотически при $t\to\infty$ не достигая их точно. Аттрактор в точке A на рис. 12б показан заштрихованной областью, и светлая область описывает аттрактор в точке B. Линия границы, разделяющей эти две области, называется сепаратриссой. Отметим, что сепаратрисса не содержит точек данных аттракторов, но принадлежит фазовому пространству системы (6). Физически это означает, что сепаратрисса состоит из пары траекторий, которые стремятся асимптотически при $t\to\infty$ к седловой точке с обеих сторон областей аттракторов.

Рассмотрим теперь два утверждения:

(а) P_A: «траектория, стартующая из произвольной точки области A, стремится к A асимптотически».

(б) P_B: «траектория, стартующая из произвольной точки области B, стремится к B асимптотически».

Данные утверждения соответствуют подмножествам фазового пространства, на которых утверждения истинны. Отождествим данные утверждения с аттракторами соответствующих точек. Рассмотрим теперь данные утверждения с позиции замкнутой логики фазового пространства.

В этом случае утверждение P_A эквивалентно классу множеств, содержащих аттрактор A и *часть или всю сепаратриссу* между аттракторами. Аналогичное рассуждение справедливо относительно утверждения P_B : эквивалентно классу множеств, содержащих аттрактор *B* и *часть или всю сепаратриссу* между аттракторами. Этот факт следует из наблюдения, что сепаратрисса замкнутая в обоих аттракторах линия и поэтому наблюдением неразличима с позиции обоих аттракторов.

Приведенное описание приводит к интересным последствиям. Поскольку утверждения находятся в отношении отрицания $P_A = \neg P_B$ и $P_B = \neg P_A$, то конъюнкция $P_A \wedge P_B \neq 0$, так как принадлежит сепаратриссе. Но выполняется отношение $P_A \vee P_B = 1$. Вероятность обнаружения состояния системы на сепаратриссе равно нулю. В открытой логике фазового пространства факт $P_A \wedge P_B \neq 0$ означает, что точки очень близки к линии сепаратриссы и их нельзя наблюдением (измерением) различить, т.е. не существует инструментария измерения факта обнаружения состояния системы на линии сепаратриссы.

Следовательно, свойство не Булевой логике присуще не только квантовым системам, но и существует в поведении классических системах.

Вернемся теперь к вопросу аксиоматизации в квантовой механике интерпретации результатов измерений и сравним с ранее приведенной системой аксиом для классической физики.

Принцип неопределенности Гейзенберга показывает, что аксиома 1, выполнимая в классической физики, для систем описываемых в квантовой механике, не выполняется.. Так, например, контрпример показывает, что если положить $a \rightleftharpoons x \in [0, \alpha], b \rightleftharpoons p_x \in [0, \alpha]$, где α – достаточно малая константа, x и p_x – проекция координаты и импульса на выбранное направление в пространстве, то данная аксиома не выполняется. Не выполняется и аксиома 2: для большинства b (при фиксированном a) посылка истинна вне зависимости от истинности формулы $Q(a, \rho)$. Поэтому желая придать смысл выражениям $a \cap b$ и $a \cup b$ в случае, если a и b несовместимы (т.е. $\forall \rho \;\; \neg R_1(a, \rho) \,\&\, R_1(b, \rho)$), необходимо применять более сложные логические конструкции.

Приведем список аксиом для квантовых систем.

Приведем список аксиом для квантовых систем, опираясь на формализм, адекватный принятым в квантовой механике допущениям, не останавливаясь на физическом обосновании формулируемых аксиом.

1. $\forall a \; \exists \rho R_1(a, \rho)$;
2. $\exists \rho \left(R_1(a, \rho) \,\&\, R_1(b, \rho) \right) \supset \left(\mathfrak{A}_2 \,\&\, \mathfrak{A}_3 \,\&\, \mathfrak{A}_4 \right)$, где $\mathfrak{A}_i, i = 2,3,4$, аксиомы из списка для классической физики;
3. $\mathfrak{A}_5 \,\&\, \mathfrak{A}_6 \,\&\, \mathfrak{A}_7 \,\&\, \mathfrak{A}_8 \,\&\, \mathfrak{A}_9$;
4. $P(a \cap b, \psi) \equiv \left(P(a, \psi) \,\&\, P(b, \psi) \right)$;
5. а) $a_1 \cup a_2 \le a_3 \equiv \left(a_1 \le a_3 \,\&\, a_2 \le a_3 \right)$;

   б) $a_3 \le a_1 \cup a_2 \equiv \forall b \;\; \left(a_1 \le b \,\&\, a_2 \le b \right) \supset a_3 \le b$;
6. $b \le a \supset (a \cap b') \cup b = a$;
7. а) $\forall a a = 0 \vee \exists b b \le a \,\&\, \alpha(b)$, где $\alpha(b) \rightleftharpoons \exists! \psi P(b, \psi)$;

   б) $\left(\alpha(\beta) \,\&\, a \le a_1 \le a \cup b \right) \supset \left(a_1 = a \vee a_1 = a \cup b \right)$;
8. $\forall \psi \;\; \exists a P(a, \psi)$.

Заметим, прежде всего, что любое множество попарно совместимых утверждений (a и b совместимы, если $\exists \rho \;\; R_1(a, \rho) \,\&\, R_1(b, \rho)$) является булевой алгеброй; аксиомы 4) – 6) является для таких утверждений следствиями остальных аксиом. Если a и b несовместимы, то формулы $Q(a \cap b, \rho)$ и $Q(a \cup b, \rho)$ не выражаются через $Q(a, \rho)$ и $Q(b, \rho)$.

Тогда в рамках принятой аксиоматики справедливо следующее предложение.

Предложение 2. Множество экспериментальных утверждений, частично упорядоченное отношением $\leq$, образует слабо модулированную атомарную структуру с ортогональным дополнением (с.м.а.о.), если операции $\cap, \cup, '$ удовлетворяют выписанным аксиомам.

Атомарность обеспечивается аксиомой 7, слабая модулярность – аксиомой 6.

Всякая полная неприводимая с.м.а.о. размерности не меньше 3, как показал Пирон, изоморфна некоторой подструктуре структуры подпространств проективного пространства *К* над телом с инволюцией. Если в качестве такого тела выбрано поле комплексных чисел, то получается формализм квантовой механики. В этом представлении состояниям отвечают последовательности ψ проективных прямых, экспериментальным утверждениям – подпространства пространства *К*, формула $P(a,\psi)$ эквивалентна утверждению: подпространство, содержащее все элементы последовательности ψ, содержится в a.

Указанная система аксиом обладает одним важным свойством. Рассмотрим множества M, A, B; определим по индукции множество *С* слов в алфавите $\{M, \cup, \cap, '\}$:

а) если $a \in M$, то $a' \in C$; б) если $x \in C$ и $y \in C$, то $x \cap y \in C$ и $x \cup y \in C$. Таким образом, *С* является свободной структурой с ортогональным дополнением, образующими которой служат элементы множества *М*.

Пусть на $M \times A, B \times A, M \times A$ заданы соответственно предикаты $Q(a,\rho), R_2(\psi,\rho), R_1(a,\rho)$. Тогда, если определение этих предикатов согласовано с аксиомами квантовой механики, то это определение можно продолжить с сохранением указанной согласованности на $C \times A, B \times A, C \times A$ и такое продолжение единственно. Выбирая в качестве элементов множества *М* утверждения вида $A \in E$ (A – наблюдаемая физической системы, *Е* – борелевское множество на прямой), то получим требуемую формальную систему.

Содержательную часть и интерпретацию результатов процессов измерений, которые не входят в аксиоматику квантовой механики и могут рассматриваться как дополнение к описанию физической системы рассмотрим в следующей работе.

3.2. Расчетные модели явлений и процессов

В реальных физических системах или устройствах встречается не один какой-либо класс явлений или процессов, уже хорошо изученных современной наукой. Наоборот, как отмечалось В.А. Фоком, приходится иметь дело с взаимодействием различных классов явлений и процессов, а также с новыми недостаточно изученными явлениями, с неполнотой и неопределенностью исходной информации. В результате физические модели реальных объектов оказываются обычно весьма сложными и не вполне определенными, что существенно осложняет (или делает невозможным) их анализ.

Все перечисленное приводит к необходимости создания *расчетных* моделей.

В цитированной ранее работе В.А. Фока по этому поводу отмечается очень важный факт: «В квантовой механике понятие состояния системы сливается с понятием максимально точных сведений или данных, которые можно получить о состоянии. С этим связано то, что законы квантовой механики приводят к выводу о невозможности объективного описания детального хода физических процессов. В самом деле, описание при помощи волновой функции не является объективным в обычном смысле. Эго особенно ясно видно на примере так называемого расплывания волнового пакета.

Уравнение Шредингера показывает, что с течением времени пакет этот расплывается, т. е. волновая функция становится отличной от нуля во все более и более широкой области. Между тем, так как частица свободна, то с ней, очевидно, при этом никаких объективных изменений не происходит. Происходит только утрата наших сведений о локализации частицы в пространстве. (Это связано с тем, что, говоря языком классической механики, свободное движение частицы является неустойчивым в смысле Ляпунова). Отсюда ясно, что описание состояния посредством волновой функции не является объективным. Вместе с тем, это описание полностью передает все то, что мы можем получить в результате максимально точных измерений, и является поэтому выражением объективно существующих законов природы. Необходимость же именно такого необъективного описания вытекает из невозможности согласовать иным путем волновую и корпускулярную природу материи, одинаково твердо установленную на опыте».

С точки зрения системной инженерии, расчетная модель также описывает процесс в физически содержательных терминах, но в отличие от физической модели в ней не учтены факторы, которые в заданных условиях и границах не оказывают заметного влияния на ход процесса и вследствие этого могут быть отброшены как мешающие параметры.

При переходе от физической модели к расчетной сложные математические зависимости или соотношения должны быть заменены по возможности более простыми приближенными или аппроксимирующими соотношениями. В частности, во многих случаях переменные величины могут заменяться их средними постоянными значениями, нелинейные соотношения – линейными и т.д. В случае недостаточно изученных связей или параметров системы в расчетную модель могут вводиться гипотезы об аппроксимации. При этом необходимо, чтобы все аппроксимации обеспечивали большую надежность системы в данных условиях ее работы, если речь идет о технических системах. При этом целесообразно иметь не одну модель, а систему аппроксимирующих моделей исследуемого процесса, каждая из которых имеет свои границы применимости (например, по ранее упомянутому принципу «от простого к сложному»).

Аппроксимация сложных систем часто носит эвристический характер, а адекватность полученной модели проверяется физическим или математическим экспериментом.

Так, например, популярный инженерный метод анализа непрерывных динамических систем использует метод аппроксимации дискретной системой уравнений и интегрированием на PC в среде МАТЛАБ/СИМУЛИНК. Рассмотрим некоторые особенности такой аппроксимации на примере моделирования непрерывных систем на дискретных устройствах.

Пример 10. О корректности и критерии соответствия устойчивости непрерывной и дискретной моделей динамической системы. Корректное моделирование неоднозначных (типа гистерезис) нелинейностей наталкивается на препятствие, обусловленной самой спецификой вычислений на дискретном устройстве. Поэтому встает остро вопрос об адекватности моделирования непрерывных систем на дискретной модели. Особенности проявляются даже при моделировании линейных систем. Рассмотрим линейную непрерывную систему вида:

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,. \tag{7}$$

При заданных ограничениях на начальные условия для устойчивости переходных процессов в непрерывной модели необходимо выполнение условий вида:

$$\operatorname{Re}\lambda_i \le 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right), \tag{8}$$

а достаточным условием, как хорошо известно, является

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right), \tag{9}$$

где λ_i – корни характеристического уравнения $\left|\lambda E - A\right| = 0$.

При применении одношаговых экстраполяционных методов дискретная модель описывается в виде следующего уравнения[21]:

$$x\left[\left(k+1\right)h\right] = x\left[kh\right] + hA\sum_{\mu=0}^{l} b_\mu \left(x\left[\left(k-\mu\right)h\right]\right). \tag{10}$$

Таким образом, при воспроизведении переходных процессов путем интегрирования системы (7) по схеме (10) получаем дискретную расчетную модель, которая в общем случае характеризуется квантованием функций по времени и уровню. Здесь будут учитываться эффекты только от квантова-

[21] Шахмундес Л.Ю. Критерии устойчивости аналоговой и дискретной моделей автоматического устройства непрерывного действия // А и Т. – 1968. – № 2. – С. 212-218.

ния по времени, предполагая отсутствие квантования функции по уровню. Подобные идеализации широко применяются в теории моделирования динамических систем.

Широко применяемый на практике метод Рунге-Кутта любой модификации приводит к дискретной модели вида:

$$x\left[\left(k+1\right)h\right]=x\left[kh\right]+hA\sum_{\mu=0}^{l}\frac{h^{\mu}}{\mu!}Ab_{\mu}x\left[kh\right], \qquad (11)$$

где h – интервал квантования функций по времени (шаг интегрирования); k – номер шага; b_{μ},l,r – параметры, зависящие от схемы конкретного метода. Для устойчивости переходных процессов в дискретной модели необходимым условием является $\left|z_i\right|\le 1\ \left(i=1,2,\dots,p\right)$ или $\operatorname{Re}q_i\le 0\ \left(i=1,2,\dots,p\right)$, а неравенства $\left|z_i\right|<1\ \left(i=1,2,\dots,p\right)$ или $\operatorname{Re}q_i<0\ \left(i=1,2,\dots,p\right)$ являются достаточными условиями.

Для системы (10) при $\left(p=n\left(l+1\right)\right)$ величины z_i являются корнями характеристического уравнения вида:

$$\left|z^{l}\left(\left(z-1\right)\left(h\sum_{\mu=0}^{l}b_{\mu}z^{l-\mu}\right)^{-1}E-A\right)\right|=0,$$

а для случая (11) $\left(p=n\right)$ имеем $\left|\left(z-1\right)E-\sum\limits_{\mu=1}^{l}\frac{h^{\mu}}{\mu!}A^{\mu}\right|=0$.

Величины q_i определяются по z_i равенствами $z_i=e^{q_ih}\ \left(i=1,2,\dots,p\right),\ \ -\pi<\operatorname{Im}qh<\pi$.

Для одношаговых процедур и для методов типа Рунге-Кутта соотношения между величинами λ_i и z_i известны[22] и позволяют достаточно просто судить о соответствии устойчивости переходных процессов в непрерывной (аналоговой) и дискретной моделях исследуемой системы.

Требование устойчивости дискретной модели при условии, что непрерывная модель устойчива, называется критерием сохранения устойчивости. Под критерием надежного суждения об устойчивости понимается требование устойчивости непрерывной модели при условии, что дискретная модель устойчива. Для методов Рунге-Кутта выбор шага h ограничиваются условием:

$$z_i=\sum_{\mu=0}^{r}\frac{h^{\mu}}{\mu!}\lambda_u^{\mu}\quad\left(i=1,\dots,n\right), \qquad (12)$$

где r – степень метода. Из (12) и равенств $\left|z_i\right|=1\ \left(i=1,2,\dots,n\right)$ следует:

$$\left(1+\sum_{\mu=1}^{r}\frac{\rho_{\tilde{\lambda}_i}^{\mu}}{\mu!}\cos\mu\phi_{\tilde{\lambda}_i}\right)+\left(\sum_{\mu=1}^{r}\frac{\rho_{\tilde{\lambda}_i}^{\mu}}{\mu!}\sin\mu\phi_{\tilde{\lambda}_i}\right)^{2}=1, \qquad (13)$$

где $\tilde{\lambda}_i=h\lambda_i$; $\rho_{\tilde{\lambda}_i}=\left|\tilde{\lambda}_i\right|$; $\phi_{\tilde{\lambda}_i}=\arg\tilde{\lambda}_i$. Уравнения (13) определяют границу области устойчивости дискретной модели в координатах $\rho_{\tilde{\lambda}_i}$ и $\phi_{\tilde{\lambda}_i}$.

На рис. 13 изображены области устойчивости (заштрихованы) для методов Рунге-Кутта 1 – 4-й степеней, полученных численным решением (13).

[22] Симкин М.М. О некорректности цифровых моделей неоднозначных нелинейностей // А и Т. – 1975. – № 9. – С. 215-219.

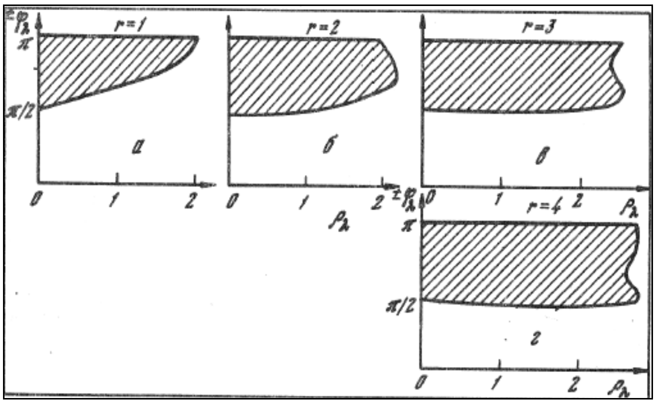


Рис. 13. Области устойчивости моделирования линейных систем методом Рунге-Кутта

Таким образом, если хотя бы одна точка окажется вне заштрихованной области, то дискретная модель будет неустойчива по отношению к непрерывной модели.

Соотношения (13) могут служить основой для анализа переходных процессов в непрерывной и дискретной моделях.

Характерной чертой расчетной модели в более общем случае является введение некоторых функционалов от изучаемых процессов. Экстремальные значения этих функционалов служат показателем оптимальности или эффективности процесса. Большое значение имеет принцип минимальной сложности аппроксимирующих моделей исследуемых процессов. Существенным требованием является сходство модели с объектом, которое можно определить на основе понятий порогов различимости и максимуму взаимного количества информации, содержащегося в расчетной модели относительно физического объекта.

Рассмотрим еще один поучительный пример о связи аппроксимации и выбора расчетной модели физического объекта.

Пример 11. Рассмотрим физический объект Φ в виде механической системы, показанной на рис. 14 с необходимыми обозначениями.

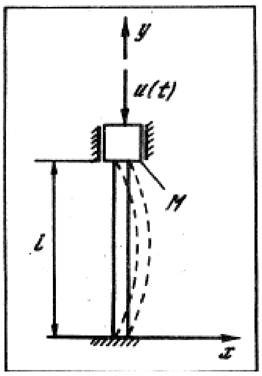


Рис. 14. Стержневая система

Предположим, что экспериментатор наблюдает только поперечные колебания $x(t)$ стержня под действием осевой нагрузки $U(t)$.

В этом случае уравнение «вход – выход» имеет вид[23]:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2\left(1 - 2\mu U(t)\right)x + \varepsilon F\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 0, \tag{14}$$

[23] Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956.

где $\beta, \omega_{\text{ï}}, \mu, \varepsilon$ – некоторые постоянные, и

$$\varepsilon F\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = 2\varepsilon_0 \dot{x} x^2 + \chi\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^{2n+1},\ \gamma_n = \text{const}. \tag{15}$$

Если же экспериментатор будет измерять поперечные и продольные колебания стержня, то при соответствующих предположениях уравнения «вход – выход» принимают вид:

$$\begin{gathered} \ddot{x} + 2\beta_1 \dot{x} + \omega_{\text{п}}^2 \left(1 - ky\right)x = 0; \\ \ddot{y} + 2\beta_2 \dot{y} + \omega_{\text{пр}}^2 y + \frac{\pi^2}{2l}\left[x\ddot{x} + \dot{x}^2\right] = \frac{1}{M}U\left(t\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $\beta_1, \beta_2, \omega_{\text{ï}}, \omega_{\text{ïð}}, k$ – некоторые постоянные величины, характеризующие затухание, частоту свободных колебаний в поперечном и продольном направлениях, $k = \left(\omega_{\text{ïð}}\right)$ соответственно.

Таким образом, в этом примере $U\left(t\right)$ – вход; $x\left(t\right)$ – выход, $y\left(t\right)$ – скрытый выход. При этом $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ взаимозаменяемы в смысле терминологии, а учет скрытого выхода приводит к новой расчетной модели: система (14) относится к классу параметрически возбужденных систем, вход $U\left(t\right)$ описывает параметрические возмущения и относится к классу внутренних входов (последние часто называют внутренними шумами); в модели (16) $U\left(t\right)$ переходит из класса внутренних входов, а сама модель имеет в отличие от (14) две степени свободы и содержит существенно нелинейные перекрестные связи, которые могут вызывать новое качественное явление перекачки энергии с одной степени свободы на другую.

На этой же модели можно проследить влияние «малых» членов на качественные особенности динамического поведения системы (16).

Примеры влияния «малых» членов на качественные особенности динамического поведения сложных систем и связь с робастностью моделей рассмотрены ниже.

Пример 11 отчетливо показывает роль создания последовательности моделей – гипотез $M_{\text{ã}} = \left\{M_{\text{ã}}^1, M_{\text{ã}}^2, \ldots, M_{\text{ã}}^n\right\}$ и тестирования их вложений $M \supset \left\{M_{\text{ã}}^i\right\}; M_{\text{ã}}^i \subset M_{\text{ã}}^{i+1}:\ \lim\limits_{i\to\infty} M_{\text{ã}}^i = M$.

Так нетрудно проверить, что модель $M_{\text{г}}^2$ (16) при $y \equiv 0$: $M_{\text{г}}^2 \supset M_{\text{г}}^1$. Действительно, умножая левую и правую части второго уравнения (16) на x и складывая с первым уравнением, после всех алгебраических преобразований получим модель (14). Приведенный анализ основных соотношений имеет в данном случае непосредственное отношение к постулированию связей с заданным физическим объектом Φ и имеет, следовательно, содержательную интерпретацию каждого выхода моделей $M_{\text{г}}^1$ и $M_{\text{г}}^2$, т.е. последние физически реализуемы.

3.3. Математические модели физических систем: термодинамический критерий физической реализуемости и информационные границы применимости

Рассмотрим по возможности кратко одно из важных понятий «система» в теории систем как синоним понятия «математическая модель физического объекта», и связанная с последним проблема корректности и физической реализуемости абстрактных математических моделей. Эти вопросы играют принципиальную роль при создании корректных математических моделей реальных объектов Φ. Оказалось, что такие фундаментальные понятия как устойчивость, корректность и физическая реализуемость математической модели взаимосвязаны, нарушение хотя бы одного из этих условий влечет за собой, по существу, нарушение и остальных условий.

Поэтому при создании корректных математических моделей необходимо проверять каждое из перечисленных условий.

3.3.1. Определение понятия «система»

В общей теории систем исследуются математические модели реальных систем как естественных, так и искусственных, созданных человеком. При этом сущностью теории систем является установление не физических аналогий в основных свойствах системы, а математических связей между ними, т.е. существенным в теории систем является не физическое, а математическое описание свойств исследуемого объекта и соотношений между ними. Под понятием «физический объект» в теории систем обычно понимается физическое устройство, характеризуемое некоторым конечным числом свойств, соответствующих целям его использования.

Таким образом. в теории систем объектом исследования является абстрактный объект *A*, связанный с множеством свойств $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые в первом приближении характеризуются числами или набором чисел; при этом сам объект описывается отношениями между этими свойствами. Физический абстрактный объект представляет собой множество переменных $\{y_i\}$ вместе с отношениями между ними.

Переменные $\{y_i\}$, связанные с объектом *A*, называются основными переменными объекта *A*. Соотношения между основными переменными называются основными уравнениями объекта *A*. В символической форме основные уравнения объекта *A* записываются в виде:

$$\Phi\left(y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}\right) = 0, \tag{17}$$

где каждое $\Phi(\ldots)$ представляет собой отношение между y_i.

Если абстрактный объекта *A* определяется соотношением (17) без каких-либо указаний о входных (причина) или выходных (следствия) переменных, то объект *A* называется неориентированным объектом. Если основные переменные подразделены на две группы (входные переменные и выходные переменные), играющие роль независимых и зависимых переменных, то *A* будет называться ориентированным объектом. Следует отметить, что такое подразделение, как было показано ранее на примере 11, может быть сделано произвольно и не иметь в общем случае фактической связи с входами и выходами.

Основные соотношения (17) могут быть получены двумя способами: могут явиться результатом измерений и экспериментов, проведенных на физическом объекте $\Phi(\ldots)$ и могут быть постулированы вне связи с какими-либо физическими объектами.

Рассмотрим первый случай. Физический объект $\Phi(\ldots)$ характеризуется множеством переменных величин $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$. Предположим, что экспериментатор выбрал подмножество этих величин $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и начал изменять их во времени с момента $t = t_0$ до $t = t_i$ по закону, описываемому функциями времени $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)$: $y_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $t_0 < t \le t_i$.

Таким образом, экспериментатор наблюдает результирующие переменные $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, например, в свойствах $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ соответственно и игнорирует оставшиеся величины $y_{k+m+1}, y_{k+m+2}, \ldots, y_{2n+1}$. В таком эксперименте функции времени $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)$ являются входами, а переменные $y_{k+m+1}, y_{k+m+2}, \ldots, y_{2n+1}$ – скрытыми выходными переменными (параметрами). При изменении входного вектора $U = \{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)\}$ и наблюдении за выходным вектором $X = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\}$ экспериментатор может получить, по крайней мере в принципе, множество соотношений, связывающих x_i и u_i, которые могут быть записаны в виде:

$$\Phi\left(u_1, \ldots, u_k,\ x_1, \ldots, x_m\right) = 0. \tag{18}$$

Соотношение вида (18) называют уравнением «вход – выход» объекта $\Phi(\ldots)$. Таким образом, главное отличие между уравнением «вход – выход» и основными уравнениями (17) объекта Φ заключается в том, что в (18) основные переменные подразделяются на входные и выходные, в то время как в (17) такого разделения нет.

Пример 11 наглядно показывает взаимосвязь понятия «расчетная модель» и принципа построения моделей согласно первому из отмеченных способов.

Если основное соотношения (17) получены по второму способу, т.е. постулированы вне связи с какими-либо физическими объектами, то их анализ значительно труднее и зависит непосредственно от аппарата современной теории интеллектуальных систем. В теории систем обычно изучаются задачи управления, устойчивости, идентификации, оптимизации, эквивалентности структур, декомпозиции, синтеза и т.п. Не существует, однако, единого общепринятого определения самого термина «система». Так, например, утверждается[24]: «такие термины как «системы», «системные подходы», «системные понятия» и «системотехника», используются в настоящее время настолько широко и свободно, что это приводит лишь к дополнительной путанице. Однако для нас система, а точнее динамическая система – строгое математическое понятие. Поэтому теория систем в основном, хотя и не полностью, является областью математики».

Таким образом, математическая теория строго формально определяет систему (на теоретико-множественном уровне описания) как некоторую совокупность множеств и связывающих их отображений, рассматривая одновременно понятие системы как математический объект. Наборы взаимосвязанных элементов из этих множеств характеризуют проявление свойств системы. При этом, постулируя свойства совокупности определяющих множеств и связывающих их отображений, можно получить различные частные определения динамической системы.

Так в случае предположения гладкости системы доказана следующая *теорема* (см. сноску 24): Пусть Σ – гладкая динамическая система. Точнее говоря, пусть а) $T = R,$ и X, U – нормированные пространства; б) Ω – нормированное пространство непрерывных функций $T \to U$ с нормой $\|\omega\| = \sup \|U(t)\|^2$; в) $\varphi(t;\tau,x,\omega) \in G'(T \to X)$ для каждого τ, x, ω, а отображение $f : T \times X \times \Omega \to T$, задаваемое отображением $(\tau, x, \omega) \to f(t;\tau,x,\omega)$ непрерывно при каждом t относительно тихоновской топологии.

Тогда переходная функция φ системы Σ является решением дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t;\tau,\pi_t\omega), \tag{19}$$

в котором оператор π_t есть отображение $\Omega \to U$, определяемое соответствием $\omega \to U(t) = \omega(t)$. Доказательство этой теоремы основано на принципе проверки непрерывности.

Из этой теоремы следует, что если основные переменные исследуемого физического объекта Φ удовлетворяет требуемым условиям гладкости, то его математическая модель должна описываться дифференциальными уравнениями. Это определение математической модели системы адекватно и полно описывает соответствующие модели динамических систем.

Определение не распространяется на динамические системы некоторого типа. Например, теорема несправедлива для динамических систем, описываемых уравнениями Пфаффа в задачах механики.

Далее, если π_t определять в виде[25] $\pi^*_t : \omega \to \left(U(t), \dot{U}(t), \ldots, U^{(q)}(t)\right)$, то для получения этого результата необходимо видоизменить условия (б) и ввести на Ω норму вида:

$$\|\omega\| = \sup_{t \in T}\left[\|U(t)\| + \|\dot{U}(t)\| + \cdots + \|U^{(q)}(t)\|\right],$$

тогда как теорема сформулирована так, чтобы обеспечить «поточечную» зависимость правой части (19).

[24] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
[25] Заде Л., Дезоер Г. Теория линейных систем. – М.: Наук, 1970.

Пример 12. Абстрактные модели А физического объекта Φ. Рассмотрим абстрактный объект *A* с основными переменными $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t), x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$ и уравнением вход – выход (18). Такой объект *A* часто называют абстрактной ориентированной моделью объекта Φ, если переменные u_i и x_i получены в результате наблюдения Ф и обозначают через $A(\Phi)$. Тогда Ф можно назвать физической реализацией *A* и обозначить через $\Phi(A)$. Абстрактная модель объекта Ф представляет собой, по существу, некоторый абстрактный объект *A*, уравнение вход – выход которого совпадает с уравнением объекта Φ. Каждый физический объект, очевидно, имеет (сколь угодно сложную) абстрактную ориентированную модель. Обратное утверждение не всегда имеет место, т.е. существуют абстрактные ориентированные и неориентированные объекты, не имеющие физической реализации $\Phi(A)$. Если объект *A* имеет хотя бы одну физическую реализацию, то он, как правило, может быть реализован в различных физических формах $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ (например, в результате общности свойств дифференциальных уравнений они могут быть реализованы в механической, электромеханической и других формах). В этом случае $A(\Phi_1), A(\Phi_2), \ldots$ будут представлять один и тот же абстрактный объект *A*, называемый математической моделью системы *M*.

3.3.2. Интерпретация и физическая реализуемость математической модели

Отметим, что в теории систем, как науке о математических моделях, почти не уделяется внимание проблеме установления критериев физической реализуемости или осуществимости данной абстрактной математической модели *A*, когда она получена по второму способу в результате введения системы постулатов вне связи с каким-либо физическим объектом $\Phi(A)$. Устанавливаемые критерии, как правило, имеют интуитивную основу и существенно зависят от опыта исследователя.

Объяснение наличия такого пробела в теории систем следует, по-видимому, искать в самом ее определении как одной из областей математики (см. приведенную ранее цитату).

Однако между математической теорией и теорией систем имеются существенные различия.

В то время как в математической теории изучаются математические объекты в общем виде, на которые наложено только одно ограничение (они не должны быть внутренне противоречивы), теория систем должна изучать только те математические модели (системы), которые имеют кроме условия внутренней непротиворечивости некое дополнительной множество ограничений и запретов, при выполнении которых математическая модель материально реализуется, т.е. допускает хотя бы одну содержательную интерпретацию, не противоречащую физическим законам и законам логики интерпретации.

С другой стороны, теорию систем нельзя отождествлять с физикой. Как отмечалось, метод, применяемый в физике, заключается в единстве качественного и количественного анализа реальных процессов и явлений, или более точно, в единстве содержательных и формальных моментов в исследовании. Задача сводится к сведению множества соотношений к какому-либо одному закону или принципу так, чтобы все эмпирические соотношения вытекали из последних как частные случаи. Результатом поиска одного или нескольких законов или принципов является соответствующая математическая модель.

Существенную помощь при разработке такой модели оказывает теория систем.

Таким образом, теория систем, как самостоятельная дисциплина, является необходимым промежуточным и связующим звеном между математикой (и ее методами) с одной стороны, и естественными дисциплинами – с другой стороны.

3.3.3. Содержательная интерпретация в реализации математической модели

Для того чтобы математический результат мог быть воспринят, необходима его качественно содержательная интерпретация [1, 4, 5, 12, 13]. Именно введение такой интерпретации дает возможным считать математические конструкции (1), полученные по второму способу (т.е. постулированные вне связи с какими-либо физическими объектами), моделями реальных объектов[26].

Следовательно, введение содержательной интерпретации дает возможность установить способность и способ физической реализуемости математической модели. Поэтому, более корректным и общим определением[27] математической модели будет следующее: Математическая модель – это формальная система, представляющая собой конечное собрание символов и совершенно строгих правил оперирования этими символами в совокупности с интерпретацией свойств определенного объекта некоторыми отношениями, символами или константами.

Подчеркнем еще раз, что совокупность переменных, констант и отношений представляет собой абстрактный математический объект и именно интерпретация делает его математической моделью реального объекта. Следует обратить также внимание на следующий факт из теории множеств[28,29]. Замена моделей интерпретацией возможна в условиях финитной метатеории. В этом случае интерпретация теории T в теории T^* определяется как конечная последовательность формул T^*, в которой каждая формула соответствует точно одному из неопределяемых отношений теории T и имеет столько свободных переменных, сколько аргументов в соответствующем отношении.

Для простоты предполагается, что все исходные понятия теории T являются отношениями.

Если атомарные формулы заменить соответствующими формулами из интерпретации, то аксиомы теории T должны быть теоремами из теории T^*.

Все эти результаты доказуемы в финитной метатеории в предположении, что все обсуждаемые теории конечно аксиоматизируемы. Для бесконечной системы аксиом даже определение интерпретации требует уже относительно сильной метатеории. Поэтому доказательства теорем типа совместности и существования моделей необходимо использовать теорию Цермело – Френкеля. Тогда представляется возможность использования понятий и результатов теории моделей непосредственно, избегая перехода к интерпретации.

Обсуждение основных положений качественного анализа в теории систем показывает, что построение качественно содержательной интерпретации может проводиться на физическом, сенсорном (чувственном) и прагматическом (ценностном) уровнях исследования при сохранении общего формализма исследования. Поэтому рассматриваемую проблему следует сформулировать следующим образом: можно ли для данной абстрактной математической модели системы (117) найти такую содержательную интерпретацию, которая не противоречила бы известным физическим законам на заданном уровне знаний (и, в первую очередь, наиболее общим из них – законам термодинамики). Другими словами, можно предложить следующую формулировку: допускает ли данная математическая модель системы такую содержательную интерпретацию, которая могла быть материально реализована, т.е. физически осуществима.

Ясно, что если не существует содержательной интерпретации данной математической модели, совместимой с физическими законами, то материально реализовать эту модель невозможно.

[26] Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. и др. Информационные аспекты качественной теории динамических систем // Итоги Науки и Техники. Сер. Техн. Кибернетика. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1976. – Т. 7. – С. 5-201.
[27] Коэн П.Дж. Теория множеств и континуума гипотеза. – М.: Мир, 1969.
[28] Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. – М.: Мир, 1973.
[29] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. – М.: Мир, 1973.

3.3.4. Чувствительность и робастность аппроксимации расчетных и математических моделей физических объектов

Отметим, что вопросы робастной аппроксимации моделей нелинейных объектов управления (ОУ), нечувствительной к ошибке (неточности аппроксимации), обсуждаются в теории и систем управления, по существу, начиная с самого начала становления теории автоматического регулирования – ТАР. Этот факт связан с необходимостью анализа и синтеза нелинейных моделей исполнительных устройств типа сервомеханизмов, электромеханических и других систем с недоопределенными (скрытыми) параметрами. Проиллюстрируем наглядными примерами влияние источников ошибок аппроксимации на корректность модели, например, из последних из указанных выше: ошибка измерений параметров модели; и пренебрежение малыми параметрами с целью упрощения описания модели управления.

Пример 13. Погрешность измерений и модель ОУ. Допустим, что ошибка измерений выходной обобщенной координаты ОУ x в силу разрешающей способности системы измерений не может быть меньше величины L, т.е. $\Delta x \geq L$. Определим производную от функции $y(x)$, у которой на аргумент наложены указанные ограничения. Отметим, что такая постановка связана непосредственно с задачами построения моделей квантовых ОУ и квантовой механики[30,31].

На рис. 15 приведено одно из возможных геометрических определений такой производной.

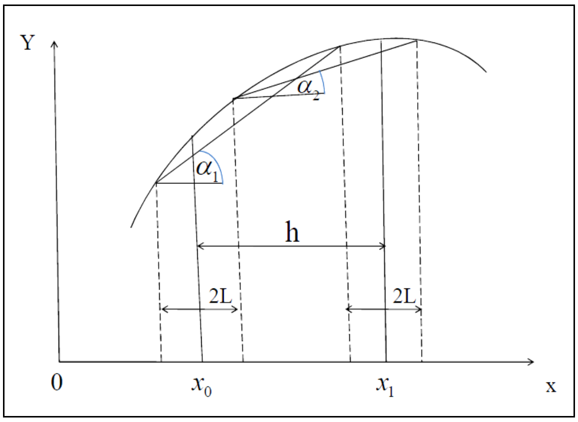


Рис. 15. Геометрическая модель производной с погрешностью аргумента

В этом случае имеем:

$$(\Delta y)_1 = y(x_0 - L + h) - y(x_0 - L); \quad (\Delta y)_2 = y(x_0 + L + h) - y(x_0 + L).$$

Поскольку $tg\alpha_1 = \frac{(\Delta y)_1}{h}$; $tg\alpha_2 = \frac{(\Delta y)_2}{h}$, то одно из возможных определений полной производной имеет следующий вид: $y'^0 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\alpha_1 + \mathrm{tg}\alpha_2)$.

Например, для функции $y = \ln x$ производная $y'^0 = (\ln y)'^0 = \left[x\left(1 - \frac{L^2}{x^2}\right)\right]^{-1}$ и при малых x может существенно отличаться от обычной производной.

Аналогично, для других аналитических функций:

---

[30] Gonzalez-Diaz P.F. Small-distance derivatives // Lett. Nuovo Cimento. – 1984. – Vol. 41. – № 15. – Pp. 481-484.
[31] Jannussis A., Symeoniclis M., Karayiannis G. New derivative models for small dimensions // Hadronic J. Suppl. – 1985. – Vol. 1. – № 2. – Pp. 239-262.

$$\left(x^m\right)'^0 = 2mx^{m-1}\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)^{m-1}\left[\left(1+\frac{L}{x}\right)^m+\left(1-\frac{L}{x}\right)^m\right]^{-1};$$

$$\left[\exp(ax)\right]'^0 = a\left[\exp(ax)\right]\left(\operatorname{ctg}(aL)\right)^{-1}$$

и т.д. Приведенная модель учитывает процессы измерений параметров ОУ и может быть обобщена на случай, когда аргументы являются нечеткими переменными. Здесь ограничимся случаем, когда система описывается Лагранжианом $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\ddot{x}-\frac{1}{2}kx^2$. Тогда имеем уравнение движения вида: $\left(1+\frac{L^2}{x^2}\right)\ddot{x}+\omega^2\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)x=0,\ \omega^2=\frac{k}{m}$, т.е. вместо стандартного для теории автоматического регулирования линейного колебательного звена модель становится существенно нелинейной и при определенных соотношениях $\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)\le 0$ становится динамически неустойчиво. При $x=L$ имеем $\ddot{x}=0$, т.е. в этом случае получаем равномерное движение.

Требования оценки корректности и точности линеаризации нелинейных моделей, с одной стороны, и границ точности аппроксимации непрерывных моделей дискретными аналогами (типа моделей численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта), с другой стороны, поставили вопрос о выборе, полноте и корректности модели ОУ и процессов управления [9].

Рассмотрим пример влияния аппроксимации в виде пренебрежения малыми параметрами в нелинейной модели.

Пример 14. Квазиоптимальное управление. Допустим, что ОУ задан системой уравнений, содержащих малый параметр μ в качестве множителя при производных $x\in R^2, z\in R^3, u\in R^1$. Уравнения ОУ с регулятором напряжения имеют вид[32]:

$$\frac{dx}{dt}(\mu)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_1} & \frac{a_1}{T_1}\\ 0 & -\frac{1}{T_2}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{a_2}{T_2} & 0 & 0\end{bmatrix}z,\quad \frac{dz}{dt}(\mu)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_3} & \frac{a_3}{T_3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{T_4} & \frac{a_4}{T_4}\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{a_5}{T_5}\end{bmatrix}u,$$

где $T_1=5; T_2=2; T_3=0{,}07; T_4=0{,}04; T_5=0{,}1; a_1=2{,}5; a_2=3{,}2; a_3=6; a_4=3; a_5=3.$

Требуется найти оптимальный закон управления, доставляющий минимум критерию:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(x_1^2+u^2\right)dt.$$

Решение данной задачи показало[33], что пренебрежение малым параметром приводит к некорректному результату оценки качества управления (рис. 16).

В методе квазиоптимального проектирования рассматривается зависимость коэффициента усиления отрицательной обратной связи *K* от малого параметра μ в виде разложения в ряд Маклорена с

[32] Sannuti P., Kokotovic P. Near-optimum design of linear systems by a singular perturbation method // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1969. – Vol.14. – №1. – Pp. 115-22.

[33] Шаршеналиев Ж. Ш. О проблемах и противоречиях управления кибернетическими и синергетическими динамическими системами // Проблемы Информатики. – 2012. – № 3. – С. 10-21.

учетом μ, где первый член соответствует упрощенному проектированию, а второй и последующие члены используются в качестве квазиоптимальной коррекции.

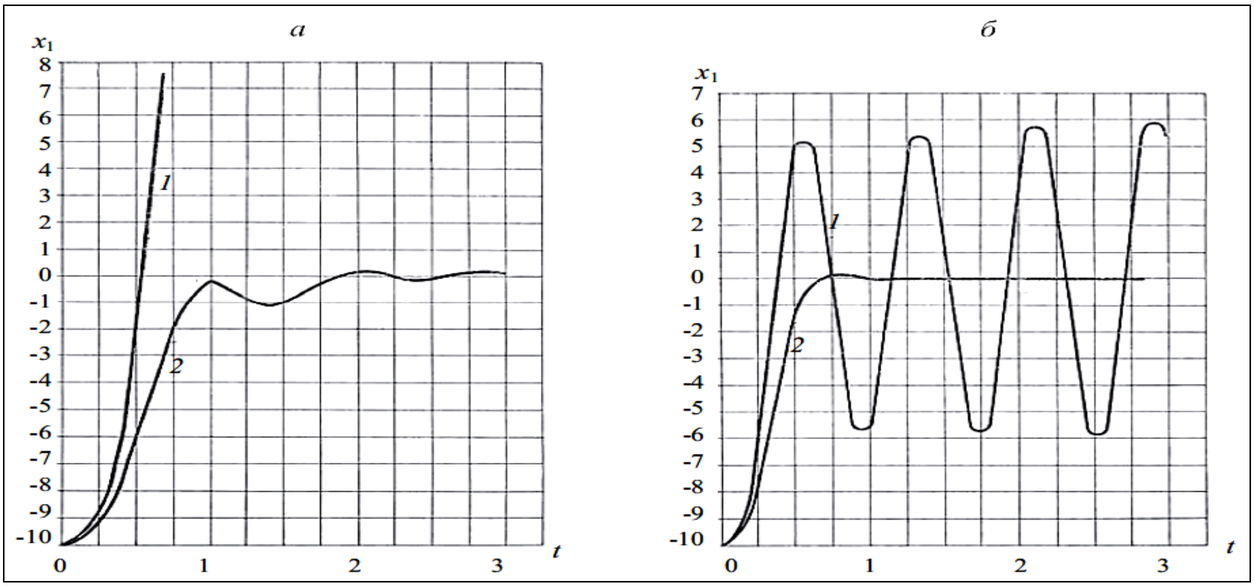


Рис. 16. Зависимости решения $x_1(t)$*, полученные с использованием двух методов проектирования:* *а –* $\mu = 0,007$*, б –* $\mu = 0,02$*; 1 – упрощенное проектирование;* *2 – квазиоптимальное проектирование*

Пример 15. Чувствительность к малым параметрам метрики инерциальной системы отсчета. Отметим некоторые особенности инерциальных систем отсчета в ОТО (подробное описание дано ниже). Известно, что в гравитационном поле не может быть введена глобальная система отсчета[34]. В этом поле (в отличии от электромагнитного поля) могут быть введены только локальные инерциальные системы отсчета, которые ускоренно движутся друг относительно друга, если только расстояние между ними бесконечно мало. Таким образом, в гравитационном поле имеет место только локальная лоренц-инвариантность. Вопрос выбора и конструирования систем отсчета рассмотрено в другой работе. Здесь следует обратить внимание на то существенное обстоятельство, что локальная система координат в гравитационном поле может быть реализована в виде достаточно малой по размеру системы координат, жестко связанной с небольшим размерам свободно падающим в этом поле телом (например, со спутником), при условии, что это тело не совершает вращательного движения. Следует также подчеркнуть (и это очень существенно), что в такой локальной инерциальной системе координат ось времени должна быть ортогональна пространственной координатной гиперповерхности этой системы координат[35].

В 1956г. Утияма, исходя из локальной лоренц-инвариантности в гравитационном поле (т.е. в зависимости параметров группы Лоренца от криволинейных координат) показал, что необходимым следствием этого обстоятельства является кривизна пространства-времени. Свободно падающая частица в гравитационном поле достаточно малой массы движется по геодезической линии искривленного 4-мерного пространственно-временного континуума.

---

[34] Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее применения в новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.

[35]Можно представить в гравитационном поле локальную систему координат, в которой ось времени не будет ортогональной пространственно-подобной системы координат, но такая локальная система координат не будет инерциальной. Здесь имеет место аналогия с двумерной неевклидовой поверхностью. На такой поверхности (например, на поверхности шара или эллипсоида) также можно ввести только локальную декартову систему координат, но невозможно ввести подобную систему глобально.

Здесь имеет место полная аналогия с классической механикой Ньютона, согласно которой материальная точка, находящаяся на поверхности, будет в результате начального импульса двигаться по геодезической этой поверхности (в случае отсутствия каких-либо других внешних сил). Так планеты, движущиеся по своим орбитам вокруг Солнца, по существу, движутся по инерции, т.е. свободно падают в искривленном 4-мерном континууме.

Возникает вопрос: почему при очень тщательных измерениях положения планет в солнечной системе никаких отклонений от евклидова характера 3-мерного пространства не было обнаружено?

Дело в том, что основная метрическая форма псевдоевклидова пространства (т.е. в отсутствии гравитации) имеет вид:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right). \tag{20}$$

Поскольку пространственно подобная гиперплоскость в пределах солнечной системы должна носить (с большим приближением) евклидовый характер, то основную метрическую форму пространственно-временного континуума в указанной области можно представить только в виде:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - \left(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right), \tag{21}$$

причем $\frac{2\Phi}{c^2} \ll 1$. Физически последнее ограничение означает, что возможные отклонения от псевдоевклидова пространственно-временного континуума в пределах солнечной системы должны быть очень малыми величинами.

В поле слабого потенциала тяготения Φ, описываемого метрикой (21), материальная точка достаточно малой массы движется по геодезической пространственно-временного континуума, т.е для действительной траектории должна обращаться в нуль первая вариация интеграла

$$\delta\int_{s_0}^{s_1} ds = 0\,. \tag{22}$$

Учитывая выражение (21), можно уравнение (22) записать в виде:

$$\delta\int_{s_0}^{s_1} ds = \delta c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{\left(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right)}{c^2 dt^2}}\,dt = \delta c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{2\Phi}{c^2}}\,dt = 0\,, \tag{23}$$

Здесь $v^2 = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2$ – скорость движения материальной точки.

Учитывая, что $\frac{2\Phi}{c^2} \ll 1$, можно записать:

$$\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2}. \tag{24}$$

Подставив это разложение в интеграл (23), получим:

$$\delta\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_1}\left(c^2 - \frac{v^2}{2} - \Phi\right)dt = 0\,. \tag{25}$$

Итак, в первом приближении закон движения материальной точки по геодезической пространственно-временного континуума сводится к принципу Гамильтона-Остроградского, если только рассматривать функцию Φ как потенциал поля тяготения в его ньютоновском смысле. Приняв эту интерпретацию функции Φ, можно в качестве второго приближения принять уравнение (23). Исходя из (23) получим следующее уравнение движения материальной точки:

$$\frac{dmv}{dt} = m \operatorname{grad} \Phi, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\Phi}{c^2}}}, \tag{26}$$

где m_0 – масса покоя материальной частицы. Уравнения (26) были получены Т. Леви-Чивита.

Итак, несмотря на весьма малые отклонения от псевдоевклидова характера пространственно-временного континуума, геодезические в этом пространстве испытывают существенные изменения, их проекции на пространственно-подобные гиперповерхности (т.е. на 3-мерное пространство) превращается вместо прямых линий в эллипсы или гиперболы.

Следовательно, поток геодезических в псевдоевклидовом пространстве весьма чувствителен к малым отклонениям от псевдоевклидовости.

В этой своеобразной неустойчивости заключается физическая особенность модели гравитационного поля; в евклидовых или римановых пространствах с положительно определенной метрической квадратичной формой данный факт не имеет место.

Следует отметить, что сам принцип Гамильтона-Остроградского является, в сущности, принципом геодезической для слабых гравитационных полей.

4. Влияние физических и логико-информационных ограничений на корректность математической модели

Принципиальное значение при формировании корректных математических моделей имеет глобальная оценка функциональной реализуемости аппроксимации при наличии логико-информационных границ и физических (термодинамических, квантово-релятивистских и др.) ограничений на описание реальных нелинейных физических ОУ.

На основе достоверности извлекаемого количества информации определяется информационная оценка приращения риска (статистической корректности) формируемого описания модели ОУ и границ её применимости. Разработка логически непротиворечивых и адекватных (корректных) моделей ОУ с целью эффективной реализации интеллектуального управления новыми видами современной техники является одной из актуальных проблем для современного этапа развития теории и систем управления.

Введение понятий синергетики динамического поведения, релятивистской и квантовой теории для учета физических особенностей ОУ в ряде случаев позволяет существенно повысить качество описания соответствующих моделей [1, 12].

Рассмотрим в связи с отмеченным фактом некоторые примеры.

Пример 16. Квантовые ограничения и корректность идентификации моделей ОУ. В общей теории динамических систем в ряде случаев оптимальные статистические процедуры для Гауссовских случайных полей оказываются, как правило, линейными. Для стационарных полей линейные статистические задачи приводят к исследованию уравнений Фредгольма 1-го рода типа:

$$y(t) = \int_0^t k(t-s)\,x(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \quad [x,y] = 0$$

и являются для идентификации ОУ или его входного сигнала [$x(t), k(t)$] некорректными задачами по Тихонову. Учет квантовой природы описываемых полей (например, бозонных) приводит к рассмотрению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода типа [33]:

$$y(t) = \frac{\hbar}{2} x(t) + \int_0^t k(t-s)\,x(s)\,ds, \ \ t \in [0,T], [x,y] = i\hbar,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка.

Таким образом, учет квантовой природы физического поля (квантовые ограничения в виде некоммутативности наблюдаемых) приводит к естественной регуляризации некорректных задач, исследуемых в теории управления традиционными ОУ.

Пример 17. Квантовые ограничения на пропускную способность канала передачи информации. В классической теории К. Шенноном получено выражение пропускной способности канала связи с соотношение P/N (сигнал/шум) и полосой пропускания $W=\dfrac{\omega}{2\pi}$ следующего вида: $C=W\ln\left(1+\dfrac{P}{N}\right)$. Из данного выражения следует, что при $N\to 0$ величина $C\to\infty$, что физически нереализуемо.

Для квантового канала передачи информации с учетом квантовых флуктуаций для пропускной способности C имеем следующее выражение[36]: $C=W\ln\left(1+\dfrac{P}{N+N_0}\right)$, где N_0 – интенсивность квантового шума. Таким образом, при $N\to 0$, $\lim\limits_{T\to 0}C=W\ln\left(1+\dfrac{P}{N_0}\right)$, т.е., является величиной ограниченной.

Рассмотрим теперь на примерах какие информационные–термодинамические ограничения могут быть наложены на модели ОУ.

Пример 18. Информационные оценки приращения риска и корректности описания статистических моделей ОУ. Рассмотрим типовую ситуацию идентификации слабо формализованной модели структуры ОУ в виде случайных параметров $x=(x_1,\ldots,x_n)$ в присутствии (мешающего или маскирующего) параметра θ. Допустим, что экспериментально (в статистическом смысле) для вектора измеряемых случайных величин $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и неизвестного параметра θ определена функция плотности распределения вероятностей параметров модели в виде $\tilde{p}(x,\theta)$ (аппроксимирующая в общем случае неизвестную истинную функцию $p(x,\theta)$).

Информационное расхождение (дивергенция) между функциями распределения вероятностей определяется мерой Кульбака-Лейблера в виде: $I(p:\tilde{p})=\iint p(x,\theta)\ln\dfrac{p(x,\theta)}{\tilde{p}(x,\theta)}dxd\theta$. По заданным функциям потерь $W(\tilde{W})$ и распределения вероятностей $p(x,\theta)[\tilde{p}(x,\theta)]$ вычисляется усредненный риск в виде: $r(W^2)(\tilde{r}(\tilde{W}^2))=\iint W^2 p(x,\theta)dxd\theta\left(\iint \tilde{W}^2\tilde{p}(x,\theta)dxd\theta\right)$.

Тогда информационная оценка приращения риска (снижения точности определения параметров модели ОУ из-за редукции аппроксимации истинной функции плотности распределения вероятностей, как меры корректности модели) определяется следующим выражением [12]:

$$-\sqrt{r(W^2)2I(\tilde{p}:p)}\le(\delta=\tilde{r}-r)\le\sqrt{\tilde{r}(W^2)2I(p:\tilde{p})}\,.$$

Таким образом, (верхняя и нижняя) оценка корректности модели в виде приращения риска $(\delta=\tilde{r}-r)$ из-за редукции данных измерения при мешающих параметрах в процессах измерения носит *нелинейный* характер зависимости от информационной дивергенции – расхождения (меры информированности исследователя) оценок качества модели ОУ.

---

[36]Ingarden R.S. Quantum information theory // Reports on Math. Physics. – 1976. – Vol. 10. – №1. – Pp. 43-72.

Приведенный результат означает, что исходного количества информации и интуитивного представления в виде информированности исследователя может оказаться недостаточным для формирования корректной модели ОУ, а сформированная модель содержит структурные элементы неопределенности.

Следовательно, интуитивный инженерный подход к разработке приближенных (расчетных) моделей ОУ, носящий зачастую вид линейной зависимости от количества извлекаемой информации о параметрах структуры ОУ, может привести к существенному расхождению в точности и с необходимым качеством формирования корректного описания модели ОУ [1, 12].

Приведенный пример показывает, что помимо физических ограничений, на корректность описания и достоверность извлеченных знаний из модели ОУ существенное влияние оказывают также и информационные границы на применимость разработанной модели.

5. Термодинамический анализ математических моделей систем

Рассмотрим теперь те ограничения или запреты, которые должны быть наложены на математические модели систем, чтобы последние были материально реализуемы с точки зрения принципов термодинамики, так как это наиболее общие физические принципы.

Любопытно отметить по этому поводу высказывание А.С. Эддингтона[37]: «Закон возрастания энтропии – второй закон термодинамики – занимает, я думаю, высшее положение среди других законов природы. Если кто-нибудь указывает вам, что ваша любимая теория вселенной находится в несоответствии с уравнениями Максвелла – тем хуже для уравнений Максвелла. Если обнаруживается, что она противоречит результатам наблюдения – ничего, экспериментаторы тоже иногда ошибаются. Но если обнаружится, что ваша теория противоречит второму закону термодинамики, вам не на что надеяться, вашей теории не остается ничего другого, как погибнуть в глубочайшем смирении». Обсудим на конкретных примерах данное утверждение.

5.1. Энтропия и функция Ляпунова

Рассмотрим кратко роль термодинамики в теории систем.

5.1.1. О роли термодинамики и термодинамического ограничения на физическую реализуемость в теории равновесных систем

Говоря о роли термодинамики в теории систем, необходимо отметить следующее. Когда речь идет об управлении тепловыми полями, диффузионными и другими встречающимися в современном производстве процессами, то в этом случае имеем дело с большими потоками энергии и энтропии, циркулирующих в элементах системы. В этом случае необходимость термодинамического подхода очевидна. Однако термодинамический подход оказывается также необходимым и для тех систем, в которых циркулирующие в них потоки энергии и энтропии относительно невелики. Это необходимо по нескольким причинам.

Так, например, согласно принципу Ландауэра (1961г.)[38], в любой вычислительной системе, независимо от ее физической реализации, при потере (стирании) 1 бита информации выделяется теплота в количестве по крайней мере W Дж: $W = kT\ln 2$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура вычислительной системы.

---

[37] Эддингтон А.С. Теория относительности. – Л.: ОНТИ. – 1934.

[38] Ландауэр Р. Необратимость и выделение тепла в процессе вычислений. // Квантовый компьютер и квантовые вычисления. – 1999. – Т. 2. – С. 9-32; (оригинал: Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process. // IBM Journal of Research and Development. – 1961. – Vol. 5. – Pp. 183-191.)

Этот принцип утверждает, по существу, что вне зависимости от технической реализации вычислительной системы, при стирании одного бита информации выделяется не менее некоторого фиксированного количества теплоты.

Фактически, работа, необходимая для стирания, пропорциональная термодинамической энтропии системы.

Данное выражение устанавливает предел для минимальной энергии, необходимой для обработки бита и имеет принципиальное значение для оценки потерь на вычисления при разработке элементной базы вычислительных систем на основе нанотехнологий. Проведенный эксперимент подтвердил[39] принцип Ландауэра.

Существует также аналогичный предел[40] для квантовых систем, на стирание общих квантовых состояний ρ, когда генерируется тепло, не меньшее, чем $Q_{\text{стирание}} \geq k_Б TS(\rho)$, где $S(\rho) = -Tr[\rho \ln \rho]$ – энтропия фон Неймана для квантового состояния ρ и ρ – эрмитовы положительные операторы со следом $Tr[\bullet] = 1$. При этом обнаружился неожиданный эффект – из-за того, что условная энтропия может быть отрицательной, работа при выполнении некоторых операций может оказываться меньше нуля. Как следствие, компьютер при работе будет не нагреваться, а охлаждаться.

Отметим еще один факт. Если в математической модели отброшены «малые» члены, делающие ее термодинамически нереализуемой, то использование такой математической модели должно привести в течение больших промежутков времени к существенному расхождению действительной и расчетной траекторий в фазовом пространстве. Отбрасывание малых членов может, как показано ранее, существенно изменить качественно ее поведение, например, ее устойчивость; в качестве примера можно привести чисто механическую систему – пружинный маятник. Как показано ранее, отбрасывание малых членов (линеаризация системы) приводит к потере качественной картины явления, т.е. потере такого явления как «перекачка энергии» вертикальных колебаний в угловые, и наоборот. Можно привести дополнительно большое количество таких примеров как для механических, так и для термодинамических систем.

Существуют ограничения качественного и количественного порядка на характер исследуемых систем. Для того, чтобы провести термодинамический анализ системы, необходимо одной группе переменных, входящих в математическую модель, приписать содержательный смысл обобщенных сил X_i, а другой группе переменных – смысл соответствующих обобщенных координат x_i так, чтобы $X_i dx_i$ имело смысл элементарной работы. Кроме того, одной из переменных, входящих в состав переменных математической модели необходимо приписать смысл абсолютной температуры или энтропии.

Интерпретируя различные переменные в математической модели в приведенном содержательном смысле, необходимо требовать соблюдения условия сохранения размерности. В дальнейшем ту или иную интерпретацию переменных математической модели будем считать допустимой, если это условие соблюдается.

Рассмотрим абстрактную математическую модель системы, состояние которой описывается $2n+1$ параметрами и n конечными уравнениями:

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}) = 0; \quad (k = 1.2.\ldots, n). \tag{27}$$

Такая модель может описывать равновесие физической модели.

Рассмотрим одну из допустимых (в указанном выше смысле) интерпретаций системы (27), при которой некоторым переменным y_k приписывается значение обобщенных сил X_k, а другим пере-

[39]Berut A., Arakelyan A., Petrosyan A., Ciliberto S., Dillienschneider R. Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics // Nature. – 2012. – Vol. 483. – №7388. – Pp. 187-189.
[40] Lubkin E. Negative entropy, energy, and heat capacity in connection with surface tension: Artifact of a model or real? // International Journal of Theoretical Physics. – 1987. – Vol. 26. – №5. – Pp. 455-481.

менным y_p приписывается значение обобщенных координат x_p. Естественно, что число обобщенных сил, также как и число обобщенных координат должно равняться числу n. Оставшейся последней переменной необходимо приписать смысл абсолютной температуры T или энтропии S. Допустим, что рассматриваемая система может быть квазистатически (бесконечно медленно) и обратимо переведена из одного состояния в другое бесконечно близкое состояние, причем так, что $T = \mathrm{const}$, т.е. процесс будет носить изотермический характер, или $S = \mathrm{const}$, т.е. процесс будет носить адиабатический характер.

Таким образом, в фазовом пространстве могут быть построены два семейства кривых: семейство изотерм и семейство адиабат, характеризующих соответственно два типа обратимых квазистатических процесса, которые могут происходить с системой. Как известно из термодинамики, для указанной системы должны выполняться следующие термодинамические соотношения:

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \quad (k, m = 1, 2, \dots, n), \tag{28}$$

что будет иметь место, если удовлетворяются следующие тождества:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_j} \right) \equiv 0. \tag{29}$$

Итак, если эти тождества выполнены хотя бы для одной из допустимых интерпретаций переменных, то рассматриваемая математическая модель может описывать состояние равновесия или квазистатический равновесный процесс некоторой реальной физической системы.

Итак, если эти тождества выполнены хотя бы для одной из допустимых интерпретаций переменных, то рассматриваемая математическая модель может описывать состояние равновесия или квазистатический равновесный процесс некоторой реальной физической системы.

Последнее означает, что в этом случае математическая модель (27) удовлетворяет термодинамическому критерию физической реализуемости.

Предположим, однако, что не существует такой допустимой интерпретации переменных системы (27), при которой выполняются тождества (28) и (29). В этом случае возникает вопрос: нельзя ли подвергнуть переменные y_k такому функциональному или операторному преобразованию, которые приведут модель (27) в новую модель, допускающую при соответствующей интерпретации переменных выполнение тождеств, аналогичных (28) и (29).

Чтобы ответить на этот вопрос, следует знать, что число функций (или операторов) $z_k = L_k(y_1, y_2, \dots, y_{2n+1})$ равно $2n+1$, в то время как число тождеств, которые необходимо будет удовлетворить после указанного преобразования равно $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Итак, в общем случае без наложения специальных и довольно жестких ограничений на функции $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{2n+1})$ математическая модель (1) невозможно осуществить преобразование, превращающее систему (27) в термодинамически допустимую.

Следовательно, если для исходной (27) не существует допустимой интерпретации переменных y_k, при которых выполняются тождества (28) и (29), то для преобразованной системы также не будет существовать допустимой интерпретации переменных, при которой система удовлетворяет термодинамическому критерию физической реализуемости. Эта реализуемость может иметь место только при очень сильных дополнительных ограничениях на вид функции $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{2n+1})$.

Число этих дополнительных ограничений равно $\frac{1}{2}(n^2 - 5n - 2)$, они становятся существенными при $n > 2$, а конкретный их вид определяется в зависимости от физической сущности рассматриваемой системы.

Рассмотрим конкретный обобщенный вариант применения приведенных ограничений на физическую реализуемость динамических процессов.

5.1.2. Обобщенные соотношения между производством энтропии в необратимых процессах и функцией Ляпунова

Используя подход феноменологической термодинамики, обсудим анализ класса динамических систем, описываемых нелинейными диссипативными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим конкретные обобщенные соотношения между функцией Ляпунова, скоростью производства энтропии и физической реализацией аппроксимирующих математических моделей, описывающих необратимые процессы в замкнутых нелинейных динамических системах. С точки зрения термодинамики обсудим поведение двух классов динамических систем: необратимых процессов при изменении обобщенных сил и необратимых процессов при изменении обобщенных координат.

5.1.2.1. Производство энтропии в необратимых процессах замкнутых динамических систем

Обсудим первый случай.

А. Производство энтропии в необратимых процессах при изменении обобщенных сил: общий случай

В соответствии с принятой методологией термодинамического анализа рассмотрим движение динамической системы как процесс релаксации, описываемый обобщенным уравнением вида:

$$X_a = f_a(y, \dot{y}, T), a = 1, 2, ..., m, \tag{30}$$

где X_a – обобщенные силы, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор обобщенных координат, $\dot{y} = (\dot{y}_1, ..., \dot{y}_n)$ – вектор обобщенных скоростей, T – температура. Таким образом все переменные имеют термодинамическую интерпретацию. В уравнении (1) предполагается, что вектор-функция $f_a(...)$ является аналитической функцией и допускает разложение в сходимый ряд типа:

$$\begin{aligned} f_a(y, \dot{y}, T) = {} & \underbrace{\alpha_0^a + \sum_i \alpha_i^a y_i + \sum_{i,k} \alpha_{ik}^a y_i y_k + \sum_{i,k,p} \alpha_{ikp}^a y_i y_k y_p + ...}_{\text{не диссипативные члены}} \\ & \underbrace{+ \sum_i \beta_i^a \dot{y}_i + \sum_{i,k} \beta_{ik}^a \dot{y}_i y_k + ... + \sum_{i,k,p} \gamma_{ikp}^a \dot{y}_i \dot{y}_k y_p + ...}_{\text{диссипативные члены}} \end{aligned} \tag{31}$$

При заданном предположении ряд в (31) является абсолютно сходимым. Введем следующие обозначения:

$$F_a(y, T) = \alpha_0^a + \sum_i \alpha_i^a y_i + \sum_{i,k} \alpha_{ik}^a y_i y_k + ..., \tag{32}$$

$$\Psi_a(y, \dot{y}, T) = \sum_i \beta_i^a \dot{y}_i + \sum_{i,k} \beta_{ik}^a \dot{y}_i y_k + ... \tag{32a}$$

Очевидно, что $\Psi_a(y, 0, T) = 0$. Уравнения (30) в соответствии с (31) и (32) могут быть записаны в виде:

$$X_a = F_a(y, T) + \Psi_a(y, \dot{y}, T). \tag{33}$$

Если система (30) находится в состоянии равновесия, то $\Psi_a(y, 0, T) = 0$ и имеем:

$$X_a = F_a(y, T). \tag{34}$$

Если условия уравнения (34) не выполняется при $X_a = \text{const}$ или если $X_a = X_a(t)$, т.е. зависит от времени, то необходимо иметь более общие соотношения из (33).

Из (33) следует, что обобщенные термодинамические силы X_a являются аддитивными функциями, состоящими из двух составляющих: «обратимой» части $X_a^r = F_a(y, T)$ и «необратимой» составляющей $X_a^{ir} = \Psi_a(y,\dot{y},T)$. Тогда, согласно феноменологической термодинамике, скорость производства энтропии определяется следующим образом:

$$\frac{d_i S}{dt} = \sigma = \frac{1}{T}\sum_a X_a^{ir}\dot{y}_a = \frac{1}{T}\sum_a \Psi_a(y_1,...,y_n,\dot{y}_1,...,\dot{y}_n,T)\dot{y}_a > 0\,. \tag{35}$$

При $T > 0$, из (35) получим следующие термодинамические условия физической реализуемости нелинейной динамической системы (33) в виде:

$$\sum_a \Psi_a(y_1,...,y_n,\dot{y}_1,...,\dot{y}_n,T)\dot{y}_a > 0, \forall y_k\ \&\ \dot{y}_i\,. \tag{36}$$

В частности, если функция $\Psi_a(...)$ является линейной, то термодинамический критерий (36) определяется положительно определенной квадратичной формой.

Необходимо отметить, что в силу определений феноменологической термодинамики критерий равновесия для системы (33) удовлетворяет следующему условию:

$$X_a = F_a(y,T) = \frac{\partial F(y,T)}{\partial y_a}, \tag{37}$$

т.е. X_a в (37) должно быть потенциальной силой.

В уравнении (37) функция $F(y,T)$ является свободной энергией системы (30).

Подчеркнем, что только при выполнении всех перечисленных термодинамических ограничений исходная система (30) может быть физически реализуемой. Допустим теперь, что снято ограничение $X_a = 0$. В этом случае имеем дело с релаксацией обобщенных координат y_i, а сам релаксационный процесс описывается следующими уравнениями:

$$F_a(y,T) + \Psi_a(y,\dot{y},T) = 0,\ \ T = \text{const}\,, \tag{38}$$

т.е. имеем процесс изотермической релаксации.

Релаксация является необратимым процессом и удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T}\sum_a \Psi_a(y,\dot{y},T)\dot{y}_a > 0\,, \tag{39}$$

т.е. в процессе релаксации эволюция энтропии возрастает, а скорость производства энтропии убывает.

Б. Соотношение между скоростью производства энтропии и функцией Ляпунова в необратимых процессах замкнутых систем

Допустим, что в рассматриваемой области фазовой плоскости изменения переменных $(y,\dot{y})$ имеем неравенство $F > 0$. Отождествим в данной области свободную энергию F с функцией Ляпунова V, т.е., $F \equiv V$. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема: При выполнении вышеописанных предположений скорость производства энтропии $\sigma = \frac{d_i S}{dt}$ в релаксационном процессе эволюции системы (30) и функция Ляпунова V связаны следующим соотношением:

$$\sigma = -\frac{1}{T}\frac{dV}{dt}\,. \tag{40}$$

Доказательство: Согласно (37) условия в (38) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial F(y,T)}{\partial y_a} + \Psi_a(y,\dot{y},T) = 0\,,\ T = const. \tag{41}$$

После умножения обеих частей в (41) на $\dot{y}_a$ и суммирования по индексу "a" получим следующее уравнение:

$$\sum_a \left[\frac{\partial F(y,T)}{\partial y_a} \dot{y}_a + \Psi_a(y,\dot{y},T)\dot{y}_a \right] = 0, \quad T = const. \tag{42}$$

Можно записать:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_a}\dot{y}_a = \frac{\partial F}{\partial y_a}\dot{y}_a, \quad \text{и} \quad \sum_a \Psi_a(y,\dot{y},T)\dot{y}_a = T\frac{d_i S}{dt} = T\sigma \,. \tag{43}$$

Тогда уравнение (43) можно записать в следующем виде:

$$\sigma = -\frac{1}{T}\frac{dV}{dt}, \tag{44}$$

т.е. получим условие (40). Ч.т.д.

Уравнение (40) является обобщением теории устойчивости релаксационных процессов.

Данное соотношение является следствием необратимых процессов при релаксации термодинамических сил.

B. Производство энтропии в необратимых процессах релаксации обобщенных сил и координат

Рассмотрим динамическую систему с обобщенными координатами x_k, которые описываются как сумма «обратимых» x_k^r и «необратимых» x_k^{ir} составляющих в виде:

$$x_k = x_k^r + x_k^{ir} \,. \tag{45}$$

Для изотермического процесса ($T = const$) исходные уравнения можно записать в виде:

- для части обобщенных координат обратимого равновесия

$$x_k^r = \sum_j A_{kj} X_j \,, \tag{46}$$

и аналогично

- для части *обобщенных* координат необратимого неравновесных состояний (далеких от равновесия):

$$\frac{dx_k^{ir}}{dt} = f_k(X_1, X_2, ..., X_n, T) \,. \tag{47}$$

Допустим, что для коэффициентов A_{kj} в (46) и для функции f_k в (47) справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k,j} A_{kj} X_k X_j > 0, \quad A_{kj} = A_{jk}, \quad f_k(0,0,...,0,T) = 0 \,. \tag{48}$$

После дифференцирования (45) по времени и в соответствии с (47) и (48) получим следующее кинетическое уравнение для изотермического процесса:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_j A_{kj}\frac{dX_j}{dt} + f_k(X_1, X_2, ..., X_n, T). \tag{49}$$

Согласно определению обобщенных термодинамических сил и соответствующих им обобщенных координат скорость производства энтропии определяется как:

$$\sigma = \frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T}\sum_j X_j \frac{dx_j^{ir}}{dt} = \frac{1}{T}\sum_k X_k f_k(X_1, ..., X_n, T) > 0. \tag{50}$$

Согласно второму закону термодинамики, скорость производства энтропии σ необратимого процесса в замкнутой системе должна быть величиной положительной. Уравнение (50) справедливо при условии $T > 0$.

Примечание 5. Скорость производства энтропии, связанная с необратимыми процессами, обозначена, как это принято, через d_iS/dt и в соответствии с принципами термодинамики должна быть положительной. Здесь не приводится вычисление энтропии системы как таковой. Для решения этой задачи необходимо было бы рассмотреть теплообмен с окружающей средой. Дальнейшее рассмотрение основано только на том, что скорость производства энтропии, в результате происходящих в системе необратимых процессов, должна быть положительна. Именно это термодинамическое требование для данного класса динамических систем является критерием физической реализуемости.

Таким образом, кинетическое уравнение (49) справедливо, если соотношения (48) выполняются. Это является требованием термодинамического критерия физической реализуемости математической модели, описывающей необратимые процессы в физическом объекте. Если $\frac{dx_k}{dt} = 0$ в (49), то релаксационные уравнения обобщенных сил примут вид:

$$\sum_j A_{kj} \frac{dX_j}{dt} + f_k(X_1, X_2, ..., X_n, T) = 0. \tag{51}$$

Если для релаксационных уравнений (51) выполняется приведенное термодинамическое условие (50), то эти уравнения действительно описывают релаксационный процесс, т.е. их решения $X_i \to 0$ при $t \to \infty$.

Другими словами, необходимо показать, что нулевое решение уравнения (20) асимптотически устойчиво в целом в смысле определения устойчивости по Ляпунову.

Для этой цели воспользуемся теоремой Ляпунова – Барбашина – Красовского[41], обладающей тем преимуществом, что на значения обобщенных сил X_i в момент времени $t = 0$ не накладывается никаких ограничений. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема (Ляпунов – Барбашин – Красовский): Допустим, что существует функция $V(z)$ с вещественными значениями, и обладающая следующими свойствами:

$V(z) > 0$ при всех $z \neq 0$, $V(0) = 0$; 2) $\frac{dV(z)}{dz} < 0$ при всех $z \neq 0$; 3) $V(z) \to \infty$ при $\|z\| \to \infty$.

Тогда система $\frac{dz_i}{dt} = \varphi_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ при $\varphi_i(0, 0, \dots, 0, t) = 0$ асимптотически устойчива в целом.

В приведенной формулировке теоремы z является n-мерным вектором, т.е. $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Для рассматриваемой системы релаксационных уравнений (49) возьмем функцию Ляпунова в виде[42]:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k} A_{ki} X_k X_i. \tag{52}$$

Определенная положительность приведенной квадратичной формы при $X_i \neq 0$ следует из принятого предположения (19) относительно коэффициентов A_{ki} и соотношения (17).

---

[41] Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. – 1952. – Т. 86. – № 3.
[42] Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. Термодинамика необратимых процессов и метод функций Ляпунова // Прикл. Мех. и Техн. Физ. – 1972. – № 4.

Производная по времени от функции Ляпунова (52) имеет вид: $\frac{dV}{dt} = \sum_{i,k} A_{ki} \frac{dX_i}{dt} X_k$. Умножив уравнения (51) на X_k и просуммировав по i и k, получим:

$$\sum_{i,k} A_{kj} \frac{dX_j}{dt} X_k + \sum_k X_k f_k(X_1, X_2, ..., X_n, T) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,k} A_{ki} \frac{dX_i}{dt} X_k = -\sum_k X_k f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, T\right) < 0$$

согласно термодинамическому условию (50).

Кроме того, из (52) следует, что $V\left(0,0,\ldots,0\right) = 0$ и $V \to \infty$ при $X_i \to \infty$.

Итак, все условия теоремы Ляпунова – Барбашина – Красовского выполнены.

Следовательно, если выполняется основное термодинамическое требование (50), то уравнения (51) действительно будут описывать релаксационный процесс.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемой системе скорость производства энтропии в результате необратимого процесса релаксации термодинамических сил равна

$$\sigma = \frac{1}{T} \sum_k X_k f_k(X_1, ..., X_n, T) = -\frac{1}{T} \frac{dV}{dt}. \qquad (53)$$

Из выражения (53) следует, что скорость производства энтропии можно определить через соответственно подобранную функцию Ляпунова и наоборот.

Преимущество полученного результата заключается в следующем. Известно, что всякая (в достаточно широком смысле[43]) функция от функции Ляпунова также является функцией Ляпунова. Поэтому среди всех этих функций Ляпунова должна быть выбрана функция, удовлетворяющая основному для рассматриваемой системы термодинамическому соотношению (50), (53). Так как скорость производства энтропии системы является однозначной функцией ее параметров, то выражение (53) позволяет однозначно выделить из множества функций Ляпунова требуемую функцию V.

Вследствие общности рассматриваемого класса динамических систем соотношение (53), устанавливающее связь между энтропией и функцией Ляпунова исследуемой системы, носит общий характер. Кроме того, доказано[44] существование функции Ляпунова для всякой дифференциальной асимптотически устойчивой системы в смысле Ляпунова. Этим по существу доказывается существование производства энтропии, вызванного неравновесным процессом в рассматриваемой системе.

Аналогичные результаты имеют место для случая изотермического процесса релаксации обобщенных координат.

Пример 19. Релаксация обобщенных координат. Рассмотрим теперь термодинамическую систему, обобщенные силы которой X_k аддитивно складывается из обратимой X_k^r и необратимой X_k^{ir} частей, т.е. $X_k = X_k^r + X_k^{ir}$. Допустим, что для изотермического процесса ($T = \text{const}$) определяющие уравнения системы записываются следующим образом: $X_k^r = \sum_i A_{ki} x_i$ и для необратимой части обобщенных сил: $X_k^{ir} = f_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right)$. Предположим, что коэффициенты A_{ki} и функции f_k такие, что выполняются следующие условия:

$$\sum_{i,k} A_{ki} x_k x_i > 0, \quad f_k\left(0,0,\ldots,T\right) = 0. \qquad (54)$$

---

[43] Дубошин Г.Н. Основы теории устойчивости движения. – М.: Изд-во МГУ, 1952.
[44] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

Так же, как и раньше, будем считать, что коэффициенты A_{ki} такие, что $A_{ki} = A_{ik}$. Основные кинетические уравнения изотермического процесса систем рассматриваемого типа могут быть записаны в виде:

$$X_k = \sum_i A_{ki} x_i + f_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right). \qquad (55)$$

Рассматриваемая система при снятии обобщенных сил допускает полную релаксацию обобщенных координат.

Релаксационные уравнения в этом случае записываются следующим образом:

$$\sum_i A_{ki} x_i + f_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right) = 0 . \qquad (56)$$

С точки зрения термодинамики для релаксационного процесса в рассматриваемой системе необходимо и достаточно, чтобы скорость производства энтропии, связанная с этим процессом, была бы положительной, т.е. необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T}\sum_k X_k^{ir} \frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{T}\sum_k \frac{dx_k}{dt} f_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right) > 0 .$$

Так как абсолютная температура всегда положительна, то нужно, чтобы:

$$\sum_k \frac{dx_k}{dt} f_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right) > 0 . \qquad (57)$$

Возьмем в качестве функции Ляпунова выражение $V = \frac{1}{2}\sum_{i,k} A_{ki} x_k x_i$. Принимая во внимание сделанные выше предположения относительно коэффициентов A_{ki} и функции f_k, а также учитывая термодинамическое требование (57), нетрудно, повторяя рассуждения, приведенные ранее по поводу системы (49), показать, что все требования теоремы Ляпунова – Барбашина – Красовского выполнены, и поэтому уравнение (3) действительно описывают полную релаксацию обобщенных координат.

Приведенные выше термодинамический анализ может быть почти дословно перенесен на более общие системы, например, вида $X_k = F_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, T\right) + \Phi_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}, T\right)$ и т.д. Однако не будем останавливаться здесь на анализе таких систем.

Таким образом, показана тесная связь между производством энтропии в необратимых процессах и функцией Ляпунова.

Приведенные выше результаты позволяют перейти к вопросу о взаимосвязи между такими фундаментальными понятиями как точность аппроксимации нелинейных систем, устойчивость, корректность и физическая реализуемость динамических систем, подчиняющихся определению математической модели.

В этом случае абстрактная модель (30) описывается дифференциальными уравнениями: обыкновенными или в частных производных.

Рассмотрим первый класс динамических систем, описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пример 20. Энтропийные оценки аппроксимации и динамической точности нелинейных систем автоматического регулирования. Рассмотрим критерии динамической точности нелинейных систем автоматического регулирования, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \Phi\left(x_1\right) + f\left(t\right); \quad \left|f\left(t\right)\right| \le L; \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \left(i \ne 1\right) \end{aligned} \qquad (58)$$

или в случае линеаризации системы уравнениями

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_1 x_1 + f(t); \quad |f(t)| \le L; \quad a_{10} \le a_1 \le a_{20};$$
$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i \ne 1). \tag{59}$$

Возмущение $f(t)$ предполагается ограниченным по модулю, а при $f(t)=0$ система (59) асимптотически устойчива. Общее решение вопроса о динамической точности системы основывается[45,46] на определении соответствующих замкнутых в фазовом пространстве форм V, заключающих все возможные фазовые траектории системы (58) при наличии возмущения $f(t)$. Это связано с анализом максимальных отклонений системы (58) и особенно с режимом устанавливающихся периодических движений (или состояний) системы.

Общий метод исследования области максимальных отклонений системы (58) состоит в нахождении условий, при которых формы V для системы (58) – $V_{\text{Н}}$ всегда будут заключаться в в формах $V_{\text{Л}}$ для системы (59). Если такие условия будут найдены, то последнее будет означать, что оценки области отклонений системы (58) никогда не превысят оценки области отклонений системы (58), если последняя определена для системы (59), исходя из максимального значения x на $V_{\text{Л}}$.

Следовательно, если $x_{\text{Л}\max}$ – максимальная величина x, соответствующая $V_{\text{Л}\max}$, то тогда при соблюдении условия $V_{\text{Н}\max}(t) < V_{\text{Л}\max}(t)$ оценка максимального отклонения нелинейной системы $x_{\text{Н}\max}(t)$, определяемого по $V_{\text{Н}\max}(t)$, будет ограничиваться величиной оценки $x_{\text{Л}\max}(t)$, которая определяется по $V_{\text{Л}\max}(t)$. Величины $x_{\text{Л}\max}(t)$ и $x_{\text{Н}\max}(t)$, таким образом, будут представлять собой оценки отклонения в линейных и нелинейных системах по соответствующим им формам V.

Пусть для каждого возмущения $f(t)$ возможно определить область $V_{\text{Ё}\max}(t)$ и соответственно указать оценку $x_{\text{Л}\max}(t)$, как одну из ее координат (например, методами технической устойчивости[47]). Тогда при условии, что на интервале времени $[0,t]$ выполняются условия $\frac{dV_H}{dt} < \frac{dV_Л}{dt}$, $\operatorname{sign}\frac{\delta V}{\delta x_1} = \operatorname{sign} x_1$, оценки $x_{\text{Л}\max}(t)$ линейной системы (59) будут ограничивать область максимальных отклонений $x_{\text{Н}\max}(t)$. Указанный и соответствующий критерий динамической точности формулируется следующим образом. Пусть для линейной системы (59) найдены $V_{\text{Л}\max}(t)$ и определена ее координата $x_{\text{Л}\max}(t)$, характеризующая оценку динамической точности линейной системы (59). Тогда $x_{\text{Н}\max}(t)$, определяемая по $V_{\text{Н}\max}(t)$, будет всегда заключаться в области $x_{\text{Л}\max}(t)$, если только

$$\Phi(x_1) - a x_1 < 0. \tag{60}$$

---

[45] Айзерман М.А. Введение в динамику автоматического регулирования двигателей. – М.: Машгиз. – 1950.
[46] Уланов Г.М. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления (компенсация и накопление возмущений). – М.: Машиностроение, 1971.
[47] Карачаров К.А., Пилютик А.Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1962.

Для доказательства (60) достаточно показать, что при выбранном условии $\Phi(x_1) - ax_1 < 0$ полные производные dV/dt, выражаемые соответственно через системы (58) и (59), будут такими же, что и на интервале $[0, t]$:

$$\frac{dV_{\text{н}}}{dt} - \frac{dV_{\text{л}}}{dt} < 0. \tag{61}$$

Подставим в (61) соответствующие зависимости (53) и получим

$$\sigma_{\text{Л}} - \sigma_{\text{Н}} < 0. \tag{62}$$

Выражение (62) является энтропийным критерием динамической точности систем (58), (59) и означает, что для выполнения условия (60) необходимо, чтобы скорость производства энтропии в нелинейной системе была больше соответствующей величины в линеаризованной системе.

Оценки вида (62) могут быть обобщены на динамические системы типы (58), содержащие несколько нелинейных неоднозначных функций типа $\Phi(x, \dot{x})$ и возмущающих функций $f(t)$. Оценки (62) позволяют исследовать вопросы накопления энтропии в динамических системах и построить соответствующую методику оценки надежности по термодинамическому критерию. Этот же подход может быть применен при разработке методики оценки грубости динамических систем[48] по термодинамическому критерию.

Выполнение термодинамических требований (положительная скорость производства энтропии в замкнутой системе, связанной с необратимыми процессами) типа (50) позволяет наложить существенные ограничения на характер кинетических процессов, описывающих те или иные необратимые процессы. Эти ограничения важны не только с теоретической, но и с практической точки зрения: они позволяют сократить объем необходимых экспериментальных работ при установлении конкретного вида кинетических уравнений необратимых процессов для тех или иных динамических систем.

5.2. Термодинамический критерий физической реализуемости: связь с критериями устойчивости и управляемости открытых динамических систем

Следует отметить, что вопросы термодинамического анализа систем, описываемых дифференциальными уравнениями, рассматривались в работах Годунова[49]: «Статья представляет попытку указать путь, следуя которому феноменологическую термодинамику можно сделать главой дифференциальных уравнений математической физики. Предполагаемое обычно изложение феноменологической термодинамики нельзя назвать строгим». И далее: «Именно, мы надеемся, что выделение систем уравнений, допустимых с точки зрения термодинамики, окажется полезным для выработки правильных постановок задач феноменологической физики и, в частности в теории квазилинейных уравнений».

Рассмотрим одно из обобщений такого подхода.

Пример 21. Уравнения Лагранжа динамических систем и термодинамический критерий реализуемости математических моделей. Кинетическая и потенциальная энергии определяются через обобщенные координаты движения тела в виде: $K = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k; U = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} b_{ik}q_i q_k$, при этом справедливо уравнение Лагранжа второго рода[50]: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i$.

---

48 Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. – 1937. – Т.14. - № 1. – С. 247-250.

49 Годунов С.К. Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // Успехи Математических наук. – 1959. – Т. 14. – Вып. 5.

50 Иванов Ю.А., Колпакова Л.В., Погребная Л.И. Уравнения Лагранжа второго рода: Методические указанния. – СПб.: СПбГТИ (ТУ). – 2009.

Следуя методам линейной алгебры, можно найти такой оператор A, что при $q = A\xi$ или $q_i = A_{11}\xi_1 + \ldots + A_{1n}\xi_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеем квадратичные формы $K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i' \xi_i^2$; $U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_i' \xi_j^2$, из уравнения Лагранжа следует:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i + f_i\left(\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{63}$$

Для системы (58) рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \xi_i^2 = K + U = E. \tag{64}$$

Вычислим полную производную в (64) и получим:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \xi_i \dot{\xi}_i . \tag{65}$$

Умножим левую и правую части (63) на $\dot{\xi}_i$ и просуммируем по i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\xi}\dot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \xi_i \dot{\xi}_i = -\sum_{i=1}^{n} f_i\left(\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n\right)\dot{\xi}_i . \tag{66}$$

Из (65) и (66) следует:

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} f_i\left(\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n\right)\dot{\xi}_i < 0. \tag{67}$$

С другой стороны, скорость производства энтропии для системы (63) вычисляется как работа сил трения и имеет следующий вид:

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_n\right)\dot{\xi}_i > 0. \tag{68}$$

Сравнивая (67) и (68) получим:

$$\frac{d_i S}{dt} = -\frac{1}{T}\frac{dV}{dt}. \tag{69}$$

Таким образом, выражение (69) устанавливает связь между производством энтропии, функцией Ляпунова и полной энергией системы (63), и является одним из общих соотношений теории колебаний динамических систем подобного типа.

Выражение (69) непосредственно показывает, что нарушение наложенных ограничений на правую часть влечет за собой автоматически нарушение ограничений, наложенных на левую часть. Иными словами, нарушение условия термодинамического критерия физической реализуемости математической модели влечет за собой ее неустойчивость и наоборот

Пример 22. Кратко рассмотрим основные физические принципы процессов управления, позволяющие устанавливать взаимосвязь между качественными характеристиками динамического поведения ОУ и исполнительным устройством САУ: устойчивостью, управляемостью и робастностью управления. Для этой цели используем информационный и термодинамический подходы, объединяющие однородным условием критерии динамической устойчивости (функция Ляпунова), управляемости и робастности.

Рассмотрим динамический ОУ, описываемый (в общем виде) уравнением:

$$\frac{dq}{dt} = \varphi\ \left(q, t, S(t), u(t)\right), \tag{70}$$

где q – вектор обобщенных координат, описывающий динамическое поведение ОУ, u – управляющая сила (выход исполнительного устройства САУ), t – время, $S(t)$ – производство энтропии ОУ и регулятором. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой уравнением (70) определяются физическими ограничениями на вид функции

Ляпунова, которая имеет два важных свойства: это строго положительная функция от обобщенных координат, т.е., $V > 0$ (условие 1); полная производная по времени от функции Ляпунова является неположительной функцией, $\frac{dV}{dt} \le 0$ (условие 2).

Согласно условиям (1) и (2) в качестве обобщённой функции Ляпунова выберем следующую функцию:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 + \frac{1}{2}S^2, \qquad (71)$$

где $S = S_p - S_c$ – производство энтропии в открытой системе «ОУ + регулятор»; S_p – производство энтропии в ОУ, S_c – производство энтропии в регуляторе (в исполнительном устройстве САУ).

Введение энтропийных характеристик в уравнение (71) возможно в силу скалярного свойства энтропии как функции времени, $S(t)$.

Первое условие выполняется автоматически. Потребуем выполнения второго условия $\frac{dV}{dt} \le 0$. В этом случае полная производная от функции Ляпунова, описанной в (71), имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\sum 2\dot{q}_i q_i + \frac{1}{2}2S\cdot\dot{S} = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i q_i + S\dot{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i\cdot\varphi\left(q,t,S(t),u\right) + \left(S_p - S_c\right)\left(\dot{S}_p - \dot{S}_c\right).$$

Таким образом, учитывая соотношение (70), имеем:

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{стабильность}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i\cdot\varphi\left(q,t,S(t),u\right)}_{\text{управляемость}} + \underbrace{\left(S_p - S_c\right)\cdot\left(\dot{S}_p - \dot{S}_c\right)}_{\text{робастность}} \le 0. \qquad (72)$$

На рис. 17 показана взаимосвязь между функцией Ляпунова и производством энтропии в ОУ и в САУ.

Рис. 17. Термодинамический критерий качества робастного управления

Уравнение (72) описывает физический закон качества управления и объединяет в аналитической форме различные меры качества управления типа: *устойчивость, управляемость* и *робастность*, поддерживающие требуемую надёжность и точность управления. Следовательно, взаимосвязь между устойчивостью по Ляпунову и робастностью, описанной уравнением (72), является основным физическим законом для проектирования САУ. Этот закон является основой для прикладной технологии проектирования БЗ робастных ИСУ (с различными уровнями интеллектуальности [1, 2]) с использованием технологий мягких вычислений.

Примечание 5**.** Практическое применение физического закона процессов управления (72) к традиционным задачам, таким как оценки точности (грубости) линеаризации моделей ОУ, наблюдаемости параметров процессов управления и др., рассмотрено в [1]. Здесь отметим, что член $\sum_i q_i \dot{q}_i$ характеризует дополнительную возможность работы с физической моделью ОУ без применения математической модели, используя непосредственно измерение динамического поведения ОУ. В этом случае имеем обобщение модели «чёрного ящика» ОУ.

Отметим одну особенность динамического поведения ОУ с диссипацией (70) в виде накопления энтропии в процессе движения замкнутой (в термодинамическом смысле) системы.

Пример 23. Допустим, что динамическая система обладает кинетической энергию T_k и потенциальной энергией U, и динамическое поведение описывается обобщенным уравнениями Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_k}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i(q_i, \dot{q}_i, S),$$

$$\frac{d_i S}{dt} = \sigma = \frac{1}{T}\sum_i \dot{q}_i Q_i(q_i, \dot{q}_i, S), \tag{73}$$

$$S = F(q,T)\ (\textit{термодинамическое условие связности}), \quad \sum_i \dot{q}_i Q_i(q_i, \dot{q}_i, S) > 0\ (\textit{идентично}).$$

Уравнения (73) описывают случай, когда тепловой обмен за счет взаимодействия с внешней средой отсутствует, и $Q_i(q_i, \dot{q}_i, S)$ описывают неконсервативные силы, включающие диссипативные силы как частный случай. Производство энтропии осуществляется в этом случае только за счет механического движения. В частном случае, когда диссипативные силы зависят линейно от энтропии S как $Q(q.\dot{q}, S) = (k + k_1 S)\dot{q}$ уравнения движения динамической системы с одной степенью свободы из (73) записываются в виде:

$$\ddot{q} + (k + k_1 S)\dot{q} + k_0 q = A\sin k_0 t,$$

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T}(k + k_1 S)\dot{q}^2, S_0 = c_q \ln T + \alpha_k q_0. \tag{74}$$

Из (74) следует, что динамическая система обладает нелинейной нестационарной структурой.

На рис. 18 показаны результаты моделирования накопления энтропии в динамической системе (74) в процессе движения.

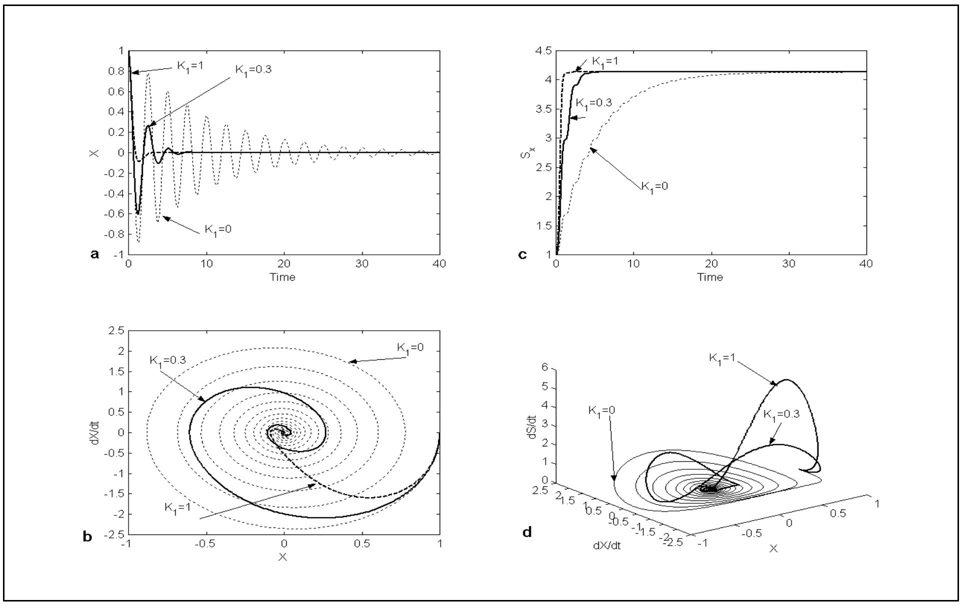


Рис. 18. Динамическое (a,b) и термодинамическое (c,d) поведение нелинейной системы (74) с различными параметрами диссипации k_1

Результаты моделирования на рис. 18 показывают высокую чувствительность термодинамического поведения системы к изменению энтропийного параметра и влияние на динамическое поведение системы (74). При этом устойчивое динамическое поведение системы (74) достигается за счет повышения накопления производства энтропии, что необходимо учитывать при формировании БЗ и при оценке надежности систем[51].

5.3. Корректность математических моделей

Рассмотрим теперь связь понятий корректность и устойчивость математической модели.

5.3.1. Корректность и устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{dx_0(t)}{dt} = P_{00}x_0(t) + \ldots + P_{0,m-1}x_{m-1}(t), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_{m-1}(t)}{dt} = P_{m-1,0}x_0(t) + \ldots + P_{m-1,m-1}x_{m-1}(t),
\end{gathered} \tag{75}$$

где $P_{00},\ldots,P_{m-1,m-1}$ – некоторые (в общем случае комплексные) числа. Как известно, решение $x(t)=\{x_0(t),x_1(t),\ldots,x_{m-1}(t)\}$ определяется при $t \ge 0$ однозначно, если известно значение $x(0)=\{x_0(0),x_1(0),\ldots,x_{m-1}(0)\}$.

[51] Использование энтропии как скалярного параметра в уравнениях механического движения впервые использовано в [1] и повторено позже через 10 лет [34].

Вектор $x(0)$ называется вектором, определяющим корректную начальную задачу[52], если соответствующе решение возрастает при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени от t, т.е. имеем:

$$x(t) = \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} x_j^2(t)} = 0(t^n). \tag{76}$$

Необходимо найти условия, которым должен удовлетворять вектор $x(0)$, чтобы он определял корректную задачу.

Решение устанавливается следующим $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ образом[53]. Рассматривается оператор *P*, действующий в m -мерном пространстве Q-векторов, в виде:

$$\begin{aligned} (P\xi)_0 &= P_{00}\xi_0 + \dots + P_{0,m-1}\xi_{m-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (P\xi)_{m-1} &= P_{m-1,0}\xi_0 + \dots + P_{m-1,m-1}\xi_{m-1}. \end{aligned} \tag{77}$$

Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ – собственные значения оператора *P* (среди которых имеются возможно равные) и $e_0, e_1, \dots, e_{m-1}$ – базис пространства Q из соответствующих собственных (и присоединенных в случае наличия кратности) векторов. Нумерация чисел λ_i устанавливается в порядке возрастания вещественных частей: $\operatorname{Re}\lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda_1 \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_{m-1}$. Вводится число r, определяемое соотношением: $\operatorname{Re}\lambda_{r-1} \le 0 \le \operatorname{Re}\lambda_r$, т.е. r – количество собственных значений оператора *P* (с учетом кратностей) с отрицательной вещественной частью. Если, в частности, $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ для всех j, то $r = 0$; и $r = m$, если $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$. Пространство Q можно разложить в прямую сумму подпространств $Q^{(-)}$ и $Q^{(+)}$, инвариантных относительно оператора *P*, первое из которых порождается векторами $e_0, e_1, \dots, e_{r-1}$, а второе – векторами $e_r, e_{r+1}, \dots, e_{m-1}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема: Вектор $x(0)$ определяет корректную задачу для системы (75), тогда и только тогда, когда он принадлежит подпространству $Q^{(-)}$.

Отсюда, в частном случае, для системы:

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \tag{78}$$

для которой задача называется корректной, если начальные данные таковы, что им отвечает единственное решение $x(t)$, которое возрастает при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени от t, также, как и его производные $\dot{x}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)$, справедлива теорема.

Произвольные задания чисел $x(0), \dots, x^{(r-1)}(0)$ определяет корректную задачу для системы (78). Приведенные результаты показывают, что понятие устойчивости и корректности исследуемого класса математических моделей взаимосвязаны.

Действительно, для того, чтобы система была устойчивой, необходимо, согласно второму методу Ляпунова, чтобы пространство $Q^{(-)}$ совпадало с пространством Q, а $Q^{(+)} \ne \varnothing$.

---

[52] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
[53] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.

Таким образом, система может быть корректной, но неустойчивой и, как следствие, физически нереализуемой. Этот же вывод остается справедливым и для более общего случая, когда для системы (75) ставится следующая общая начальная задача.

Задана система уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 + \ldots + a_{0,m-1}\xi_{m-1} = b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{q0}\xi_0 + a_{q1}\xi_1 + \ldots + a_{q,m-1}\xi_{m-1} = b_q. \end{aligned} \tag{79}$$

Требуется найти вид матрицы $A = \left\| a_{jk} \right\|$ такой, чтобы при любых числах $b_0,\ldots,b_q$ существовал и притом единственный, вектор $x(0)$, обеспечивающий корректную начальную задачу для системы (75) с координатами $x(0) = \xi_0,\ldots,x_{m-1}(0) = \xi_{m-1}$, удовлетворяющими системе (75).

В этом случае система (75) определяет при любом векторе корректную задачу для системы (75) тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\det AE \neq 0,$$

где E – часть жордановой матрицы оператора *P*, образованная столбцами, соответствующими базисными векторами $e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}$ подпространства $Q^{(-)}$.

Рассмотрим теперь взаимосвязь аналогичных понятий для второго динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Следует отметить, что С.К. Годунов[54] подчеркнул важность исследования вопросов взаимосвязи термодинамики и качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных: «Следующая задача состоит в выяснении того, какое отношение имеет термодинамика к основным фактам теории дифференциальных уравнений в частных производных. Интересно было бы определить, для каких систем таких уравнений существует понятие, аналогичное энтропии».

Такая постановка задачи имеет под собой глубокие исторические корни. Дело в том, что феноменологический подход в теории дифференциальных уравнений применяется давно. Так еще в 1911г. Ж. Адамар утверждал, что теория дифференциальных уравнений с частными производными должна рассматривать только корректные задачи. Это требование – феноменологического характера. Впоследствии изучали, какие ограничения накладывает это требование на сами дифференциальные уравнения. И.Г. Петровский в 1937г. показал, что корректность задачи Коши зависит от строения характеристического коноида системы. Им был выделен класс гиперболических уравнений, для которых задача Коши корректна.

5.3.2. Корректность и устойчивость дифференциальных уравнений в частных производных: связь с термодинамикой

Рассмотрим математические вопросы определения корректности дифференциальных уравнений в частных производных и связь их с методами термодинамики.

Напомним кратко понятие корректности задач математической физики, сущность определения которого сводится к следующему. Пусть D – совокупность данных; U – совокупность искомых; A – оператор, который преобразует U в D так, что:

$$AU = D. \tag{80}$$

Задача состоит в том, чтобы найти U по заданным A и D. В общем случае U и D рассматриваются как элементы метрических пространств $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно.

---

[54] Годунов С.К. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // Успехи Математических Наук. – 1962. – Т. 17. – Вып. 3.

Задача (80) корректна в паре $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, если при любом $D \in \mathcal{B}_2$ она имеет одно и только одно решение и если в достаточно малому (в метрике $\mathcal{B}_2$) изменению D соответствует сколь угодно малое (в метрике $\mathcal{B}_1$) изменение U. В математической физике рассматриваются, как правило, дифференциальные уравнения с выделенной координатой, обозначаемой через t и меняющейся обычно на полуоси $0 \le t < \infty$. Рассматриваются, в основном, уравнения, разрешенные относительно старшей производной по t:

$$\frac{\partial U^m(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U^k(x,t)}{\partial t^k}; \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{81}$$

где $P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – некоторые многочлены от $i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}$ максимальной степени, например, p. К уравнению (81) присоединяют начальные условия, накладываемые на функции $U(0,x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial U^{m-1}(0,x)}{\partial t^{m-1}}$. В ряде случаев отмечается желательное поведение решения $U(t,x)$ при $t \to \infty$. Все эти данные образуют краевую задачу для уравнения (81). Кроме того, указывается класс функций от x (может быть обобщенных), которому должно принадлежать решение $U(t,x)$ при каждом фиксированном t. Краевая задача, согласно данному выше общему определению, считается корректно поставленной в некотором классе $\mathcal{R}$, если при любой допустимой системе краевых данных она имеет решение в данном классе, единственное в нем и непрерывно зависящее от системы краевых данных. Последнее условие требует, чтобы класс $\mathcal{R}$ обладал некоторой топологией с тем, чтобы оператор, переводящий допустимую начальную функцию $U(x)$ в решение $U(t,x)$, был непрерывным в $\mathcal{R}$. В свою очередь, одна и та же задача может быть корректной в одной паре пространств и некорректной в другой паре[55]. Таким образом, краевая задача считается поставленной корректно, если выполняются одновременно три условия: существование решения, его единственность и непрерывная зависимость от начальных и краевых условий. Следует также отметить, в задачах математической физики некорректные задачи, которые долго считались лишенными физического смысла, играют важную роль. Примером некорректной задачи являются так называемое интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Одной из первых работ, посвященной решению некорректных задач была работа А.Н. Тихонова[56], предложившего метод решения, основанный на том, что решение некорректной задачи рассматривается как предел решений специальным образом построенной последовательности корректных задач.

Поэтому возникает вопрос, существует ли для данного уравнения в фиксированной области хотя бы одна корректная краевая задача. Как показал Л. Хермандер[57], на этот вопрос можно ответить утвердительно, например, в случае уравнения с постоянными коэффициентами. Для систем дифференциальных уравнений ответ на вопрос о существовании корректных краевых задач оказался более сложным, чем для одного уравнения. Для случая термодинамически необратимых процессов газовой динамики С.К. Годунов показал, что если задача Коши для распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных, не имеет единственного решения, то наложение запретов, имеющих термодинамический характер (требование положительности производства энтропии при необратимых процессах), приводит к единственности решения, удовлетворяющему этой системе уравнений.

Таким образом, вопросы о корректности дифференциальных уравнений имеет непосредственное отношение к термодинамике. При этом условия корректности дифференциальных уравнений в част-

[55] Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
[56] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974.
[57] Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит ., 1959.

ных производных типа (281) можно получить из соответствующих условий для обыкновенных дифференциальных уравнений, используя преобразование Фурье.

Выводы

При построении математической модели необходимо проверять ее корректность, устойчивость и условия термодинамического критерия физической реализуемости: нарушение хотя бы одного из этих условий ведет, по существу, к нарушению остальных условий. При этом необходимо, чтобы условие корректности и устойчивости исследуемой математической модели совпадали с соответствующим понятием их устойчивости. Этот вывод является обоснованием часто встречающейся в системной инженерии интуитивной замены понятия корректности обыкновенных дифференциальных уравнений Таким образом, выбор физического базиса проведения эксперимента и определение математического способа (задания критерия корректного описания) модели ОУ существенно влияют на качество интерпретации результата процесса обработки экспериментальных данных и извлечения объективных знаний из динамического поведения самого ОУ.

Список литературы

1. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Теория моделей в процессах управления: Информационно-термодинамические аспекты. – М.: Наука, 1978.
2. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Сложность конечных объектов и информационная теория управления // Итоги Науки и Техники. – сер. Техн. кибернетика. – ВИНИТИ АН СССР, 1979. – Т. 11. – С. 77-147.
3. Слисенко А.О. Сложностные задачи теории вычислений // Успехи Математических Наук. – 1981. – Т. 36. – № 6. – С. 21-103.
4. Manin Yu. I. Kolmogorov complexity as a hidden factor of scientific discourse: From Newton’s law to data mining. // arXiv: 1301.0081 [math. HO]. – 2013.
5. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское Радио, 1979.
6. Успенский В.А. Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении // Успехи Математических Наук. – 1974. – Т. 29. – № 1. – С. 3-47.
7. Беклемишев Л.Д. Теорема Геделя о неполноте и границы ее применимости. I // Успехи Математических Наук. – 2010. – Т. 65. – № 5. – С. 61-47.
8. Chaitin G.J., Godel’s theorem and information // Intern. J. Theor. Phys. – 1982. – Vol. 21. – No 12. – Pp. 941-954.
9. Красовский А.А. (ред.). Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., 1987.
10. Красовский А.А. Проблемы физической теории управления // Автоматика и Телемеханика. – 1990. – № 11. – С. 3-26.
11. Колесников А.А. Синергетика и проблемы управления. – М.: Физматлит, 2004.
12. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Хазен Э.М. Информационно-семантические аспекты процессов управления и организации. – М.: Наука, 1977.
13. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980.
14. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // Physical Review. – 1935. – Vol. 47. – Pp. 777-780.
15. Bohr N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // Physical Review. – 1935. – Vol. 48. – Pp. 696-701.

16. Фок В. А., Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н., Бор Н. Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? // Успехи Физических Наук. – 1936. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 436-457.

17. Bohm D., Aharonov Y. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky // Physical Review. – 1957. – Vol. 108. – No 4. – Pp. 1070-1076.

18. Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н. Запутанные квантовые состояния атомных систем // УФН. – 2001. – Т. 171. – № 6.

19. Bell J. On the Einstein – Podolsky – Rosen paradox // Physics. – 1964. – Vol. 1. – No 2. – Pp. 195-200.

20. Bell J. Speakable and unspeakable in quantum mechanics. – Cambridge Univ. Press. – 1987.

21. Aspect A., Dalibald J., Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers // Phys. Rev. Letters. 1982. – Vol. 49. – Pp. 1804-1807.

22. Новиков П. С., Элементы математической логики – М.: Физматгиз. – 1959.

23. Гильберт Д., Аккерман А. Основы теоретической логики. – М.: Иностранная Лит. – 1947.

24. Birkhoff G., von Neumann J. The logic of quantum mechanics. // The Logico - Algebraic Approach to Quantum Mechanics. C. A. Hooker (Ed.). – Amsterdam. – 1979. – Pp. 1-26.

25. Гриб А.А. Квантовая логика: Возможные применения // Закономерности развития современной математики: Методологические аспекты. – М.: Наука. – 1987. – С. 313-317.

26. Гриб А.А., Запатрин Р.Р. Квантовая логика – Проблемы и перспективы // Проблемы Информатики. – М.: Наука. – 1986. – С. 124-317.

27. Dalla Chiara M. L., Guintini R., and Greechie R. Reasoning in quantum theory: Sharp and unsharp quantum logic. – Kluwer Acad. Publ., Holland. – 2004.

28. Mittelstaedt P. Quantum logic. – D. Reidel Publishing Company. – 1978.

29. Redei M. Quantum logic in algebraic approach. – Kluwer Academic Publishers. – 1998.

30. Cohen D. W. An introduction to Hilbert space and quantum logic. – Springer. – 1989.

31. Engesser K., Gabbay D.M., Lehmann D. (Eds). Handbook of quantum logic and quantum structures: Quantum logic. – Elsevier, Holland. – 2009.

32. Pitowski I. Quantum probability and quantum logic. – Springer, Heidelberg. – 1989.

33. Холево А.С. Некоторые статистические задачи для квантовых полей // Теория Вероятностей и ее Применения. – 1972. – Т. 17. – Вып. 2. – С. 360-365.

34. Perroud M., Saucier A. Thermodynamics of dissipative systems // Helvetica Physica. – 1987. – Vol. 60. – No 8. – Pp.1038-1051.